

КРАТКИЙ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
СПРАВОЧНИК

А. Г. Аленицын  
Е. И. Бутиков  
А. С. Кондратьев

А. Г. Аленицын  
Е. И. Бутиков  
А. С. Кондратьев

КРАТКИЙ  
ФИЗИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
СПРАВОЧНИК

ПЕТРОГЛИФ • ЧЕРО

А. Г. Аленицын  
Е. И. Бутиков  
А. С. Кондратьев

# КРАТКИЙ ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

Петроглиф • ЧеРо  
С.-Петербург • Москва  
2005

**УДК 373 377 378**  
**ББК 22.1я2+22.3я2**  
**К 78**

**Аленицын А. Г., Бутиков Е. И., Кондратьев А. С.**

**К 78** Краткий физико-математический справочник. —  
Изд. 5-е, испр. — СПб. : «Петроглиф», 2005. — 544 с.: ил. —  
ISBN 5-98712-002-0

Охватывает все разделы современных начальных курсов физики и математики. Содержит определения основных понятий, физических и математических величин, формулировки физических законов, математических аксиом и теорем, важнейшие формулы. Все сведения приведены в согласованную систему, что создает удобство в практическом применении справочника, например при решении задач.

Для учащихся и преподавателей средней школы, техникумов, слушателей подготовительных отделений вузов, а также студентов педагогических и технических вузов.

**ББК 22.1я2+22.3я2**

**ISBN 5-98712-002-0**

© Аленицын А. Г., Бутиков Е. И.,  
Кондратьев А. С., 1990  
© Курбанов И. В., обложка, 2005  
© «Петроглиф», 2005

**Учебное издание**

**Аленицын Александр Георгиевич**  
**Бутиков Евгений Иванович**  
**Кондратьев Александр Сергеевич**

**КРАТКИЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК**

Редактор *Е. В. Дольник*  
Верстка *С. С. Афонин*  
Иллюстрации *В. Р. Ткачук*  
Корректор *Е. Г. Никитина*

ООО «Петроглиф» Подписано к печати 01.08.2005 г.  
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.  
Объем 34 п.л. Тираж 5 000 экз. Заказ 2172.

Отпечатано в ГП Псковской области  
«Великолукская городская типография»  
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12  
Тел./факс (811-53) 3-62-95. E-mail: VTL@MART.RU

## От редакции

Настоящее пятое издание «Краткого физико-математического справочника», авторы которого — известные ученые и педагоги,— выходит в эпоху так называемого информационного взрыва, при котором информация становится предметом повышенного спроса. Первое издание книги появилось в 1990 году и почти сразу было полностью распродано. В 1997 году справочник был издан в США на английском языке и с тех пор продолжает успешно продаваться там и в других странах мира, а в 2000 году книга появилась в списке 25 бестселлеров.

Основная причина популярности данной книги в том, что это — единственное справочное пособие учебного характера, соединяющее в одно целое две родственные науки — физику и математику. Известно, что исторически долгое время физика и математика развивались как единое целое, и лишь позднее разделились на самостоятельные науки. Теперь наблюдается во многом обратная тенденция — методы математики все глубже проникают в физику (особенно теоретическую), а непрерывно возникающие новые физические проблемы и идеи служат мощным источником и стимулом для дальнейшего развития математики.

Соединение в одной книге двух справочников — по математике и по физике — с одной стороны, отражает сказанное выше об органическом единстве этих наук, а с другой — преследует и чисто практическую цель — обеспечить читателю физической части книги возможность быстро и в согласованных терминах получить справку по математике, и наоборот (чему содействует, в частности, принятая в книге система взаимных ссылок).

Успеху книги способствует расположение материала не в алфавитном, а в тематическом порядке, а также соединение ясности с высоким уровнем изложения. Материал излагается последовательно и иллюстрируется большим количеством примеров. В целом книга обладает достоинствами как справочни-

ка в собственном смысле слова, так и книги для чтения, что позволяет рекомендовать ее для самостоятельной работы и самообразования. Особенно полезна книга может быть для старших школьников, абитуриентов и студентов младших курсов средних и высших учебных заведений.

Об авторах:

Аленицын Александр Георгиевич — математик, доцент Санкт-Петербургского государственного университета и Российского государственного университета им. А. И. Герцена, автор ряда работ в области дифференциальных уравнений и их приложений в теории волн, постоянный сотрудник реферативного журнала «Mathematical Reviews» (США).

Бутиков Евгений Иванович — физик, профессор Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий механики и оптики, автор научных работ по нелинейной механике и учебников по физике, а также оригинальных учебных компьютерных программ по небесной механике и теории колебаний.

Кондратьев Александр Сергеевич — физик, академик РАО, профессор Санкт-Петербургского государственного университета, Российского государственного университета им. А. И. Герцена, Университета штата Вашингтон (США) и Правительственного университета в Лахоре (Пакистан), автор многочисленных работ по теории квантовых жидкостей, физике плазмы и квантовой статистической механике, а также учебников по физике и оригинальных курсов по методике преподавания физики.

# МАТЕМАТИКА

---

## 1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ

Эта глава содержит часто употребляемые простейшие алгебраические формулы, правила действий с дробями, вычислений с округлением, а также описание метода математической индукции.

### 1.1. Общие правила

1°. В математике, кроме обычных знаков арифметических действий и неравенств, употребляются следующие обозначения:  $\in$  — принадлежит,  $\notin$  — не принадлежит,  $\Rightarrow$  — следует,  $\Leftrightarrow$  — равносильно,  $\emptyset$  — пустое множество,  $\cup$  — объединение множеств,  $\cap$  — пересечение множеств,  $\subset$  — подмножество,  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел,  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел,  $\mathbb{R}$  — множество действительных (вещественных) чисел,  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

### 2°. Правила раскрытия скобок:

1)  $a(b + c) = ab + ac$ , т. е. каждое слагаемое умножается на  $a$  и полученные произведения складываются. В частности,  $-(b + c) = -b - c$ ;

2)  $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$  или  $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$ , т. е. каждое слагаемое из первой скобки умножается на каждое слагаемое из второй скобки и полученные произведения складываются.

### 3°. Формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2;$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1};$$

$$(1 + q) [1 - q + q^2 - \dots + (-1)^n q^n] = 1 + (-1)^n q^{n+1}.$$

Эти формулы полезны для преобразования (упрощения) выражений; часто их применяют, читая «справа налево».

### Примеры

$$1) \frac{1 - h^5}{1 - h^2} = \frac{(1 - h)(1 + h + h^2 + h^3 + h^4)}{(1 - h)(1 + h)} = 1 + h^2 + \frac{h^4}{1 + h};$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{x^2 - y^2}{(x - y)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} + 3\sqrt[3]{xy} &= \\ &= \frac{(x - y)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(x^{2/3} - x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})}{(x - y)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} + 3\sqrt[3]{xy} = \\ &= x^{2/3} + 2x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3} = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^4 &= \\ &= \left[ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \right] \cdot \left[ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \right] = \\ &= (a + 2\sqrt{ab} + b - a + 2\sqrt{ab} - b) (a + 2\sqrt{ab} + b + a - 2\sqrt{ab} + b) = \\ &= 8\sqrt{ab}(a + b). \end{aligned}$$

4°. Выражение вида  $\frac{m}{n}$  (или  $m/n$ ), где  $n \neq 0$ ,  $m$  и  $n$  — целые числа (п. 2.2.1°), причем  $m$  не делится нацело на  $n$ , называется дробным числом или *дробью* (иногда — обыкновенной, или

натуральной, дробью). Дробь имеет числитель  $m$  и знаменатель  $n$ . Если  $|m| < |n|$ , дробь правильная, если  $|m| > |n|$ , дробь неправильная. У неправильной дроби можно выделить целую часть, например:

$$\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$$

(читается «два и одна треть»; не путать с  $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ !).

### 5°. Правила действий с дробями:

1)  $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot b}{n \cdot b}$ , т. е. при умножении числителя и знаменателя на одно и то же число (не равное нулю) значение дроби не меняется; это правило используется:

при сокращении дробей, например:

$$\frac{824}{515} = \frac{103 \cdot 8}{103 \cdot 5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5};$$

при сложении и вычитании дробей (для приведения к общему знаменателю), например:

$$\frac{5}{63} - \frac{11}{42} = \frac{5}{3 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{10}{126} - \frac{33}{126}.$$

Здесь в первой дроби введен дополнительный множитель 2 в числитель и знаменатель, во второй дроби — дополнительный множитель 3.

2)  $\frac{m}{n} \pm \frac{l}{n} = \frac{m \pm l}{n}$ , т. е. при сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями складываются (вычитаются) их числители, а знаменатель новой дроби — тот же, что и общий знаменатель данных дробей, например:

$$\frac{10}{126} - \frac{33}{126} = \frac{10 - 33}{126} = \frac{-23}{126} = -\frac{23}{126}.$$

3) Для приведения дробей к общему знаменателю:

находят *общее кратное* знаменателей (п. 2.2.1°), т. е. целое число, которое делится (без остатка) на каждый из знаменателей;



для каждой дроби находят *дополнительный множитель*, т. е. множитель, дополняющий знаменатель до общего кратного (общего знаменателя);

домножают числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель, тогда дроби будут иметь *общий знаменатель*.

После этого можно сложить (вычесть) дроби в соответствии с правилом 2).

Обычно удобно находить наименьший общий знаменатель (т. е. наименьшее общее кратное знаменателей). Для этого каждый знаменатель раскладывают на простые множители и образуют общий знаменатель в виде произведения наибольших степеней этих множителей. Например,

$$\begin{aligned}\frac{7}{324} + \frac{11}{180} &= \frac{7}{2^2 \cdot 3^4} + \frac{11}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \\ &= \frac{7 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} + \frac{11 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5} = \frac{35 + 99}{1620} = \frac{134}{1620} = \frac{67}{810}; \\ \frac{2}{15} + \frac{1}{6} - \frac{3}{7} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{-27}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = -\frac{9}{70}.\end{aligned}$$

4)  $\frac{m}{n} \cdot \frac{l}{k} = \frac{m \cdot l}{n \cdot k}$ , т. е. при умножении дробей числители перемножаются, знаменатели также перемножаются.

5)  $\frac{m}{n} : \frac{l}{k} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{m \cdot k}{n \cdot l}$ , т. е. деление дроби на дробь равносильно умножению на обратную («перевернутую») дробь, например:

$$\frac{21}{5} : \frac{7}{15} = \frac{21 \cdot 15}{5 \cdot 7} = 3 \cdot 3 = 9.$$

6°. Свойствами, аналогичными свойствам дробей, обладают *дробные выражения* (отношения), т. е. выражения вида  $\frac{A}{B}$  (или  $A/B$ ), где  $A$  и  $B$  — любые числовые или буквенные выражения. Так, умножение и деление выполняются по тем же

правилам 4) и 5); сложение и вычитание можно выполнять, приводя дроби к общему знаменателю:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D};$$

например,

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

7°. Равенство двух отношений называется *пропорцией*:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Здесь  $A$  и  $D$  — крайние члены,  $B$  и  $C$  — средние члены пропорции.

*Свойства пропорции.*

Если  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ , то:

1)  $A \cdot D = B \cdot C$ , т. е. произведение крайних членов равно произведению средних членов;

$$2) \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}, \quad \frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}, \quad \frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D}.$$

Вообще,

$$\frac{A + \alpha B}{B + \beta A} = \frac{C + \alpha D}{D + \beta C}$$

(производные пропорции), где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа;

например, если  $\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{6}$ , то

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{6}; \quad \frac{x+2}{2x-1} = \frac{y+4}{2y+2}.$$

8°. Одна сотая часть числа составляет один *процент* (%) этого числа; например, 5 м — это 1% от 500 м; соответственно, 2% — это 0,02. Вообще,  $p\%$  числа  $a$  соответствует  $p/100$  части данного числа  $a$ . Само число  $a$  принимается за 100%; 50% чис-

ла  $a$  — это половина  $a$ . Формула для подсчета процентов: число  $b$  составляет  $p\%$  числа  $a$ , если  $b = \frac{p\%}{100\%}$ , или  $p\% = 100\% \cdot \frac{b}{a}$ .

### Примеры

1) При стрельбе в цель из 50 выстрелов было 32 попадания. Это составляет  $p\% = 100 \cdot 32/50 = 64\%$ .

2) За 1 год население города увеличилось на 2% и составило 830 тыс. человек. Какова была численность населения города в начале года?

830 тыс. — это 102% первоначального населения, а 1% — это  $(830/102)$  тыс., первоначально же было 100%, или 830 тыс.  
 $\frac{830 \text{ тыс.}}{102\%} \approx 813,7 \text{ тыс. человек.}$

## 1.2. Десятичные дроби

1°. Дробь, знаменатель которой есть натуральная степень числа 10, может быть записана в виде *десятичной дроби*, например:

$\frac{3}{100} = 0,03$  (читается «нуль целых три сотых»),  $2\frac{812}{1000} = 2,812$  («две целых восемьсот двенадцать тысячных»). Запятая отделяет целую часть от дробной; иногда вместо запятой употребляется точка.

2°. *Правила действий с десятичными дробями:*

1) Приписывание или отбрасывание нулей справа не меняет значения дроби (см., однако, § 1.3):

$$3,1400 = 3,140 = 3,14.$$

2) Умножение на 10 сводится к переносу запятой на один разряд (позицию) вправо:

$$2,812 \cdot 10 = 28,12; \quad 0,03 \cdot 100 = 0,3 \cdot 10 = 3,0 = 3.$$

3) Деление на 10 сводится к переносу запятой на один разряд влево:

$$\begin{aligned}28,12 : 10 &= 2,812; & 2,812 : 10 &= 0,2812; & 0,2812 : 10 &= 0,02812; \\30 : 1000 &= 3,0 : 100 = 0,3 : 10 = 0,03.\end{aligned}$$

4) Сложение положительных десятичных дробей и вычитание меньшей дроби из большей производится «столбиком»; при этом числа записывают одно под другим таким образом, чтобы запятые оказались одна под другой:

$$\begin{array}{r}+ \quad 312,07 \\ \quad 0,342 \\ \hline 312,412\end{array} \quad \begin{array}{r}- \quad 312,07 \\ \quad 0,342 \\ \hline 311,728\end{array}$$

При действиях с округлениями младшие разряды следует отбрасывать (§ 1.3).

5) Умножение десятичных дробей сводится к умножению целых чисел: сначала умножают дроби как целые числа, не обращая внимания на запятые; затем в произведении отделяют справа запятой дробную часть, длина которой (т. е. число разрядов) равна сумме длин сомножителей, например:

$$312,07 \cdot 0,342 = 106,72794.$$

При умножении с округлением следует отбросить в ответе младшие разряды, в данном примере результат можно округлить до 106,728 или 106,73 (§ 1.3).

6) При делении десятичных дробей удобно сначала перенести запятую вправо у делимого и делителя на одинаковое число разрядов так, чтобы сделать делитель целым, затем выполнить деление по правилу деления на целое число «уголком», удерживая нужное количество разрядов (п. 1.3.1°). Длина целой части определяется при делении целой части делимого на делитель (п. 2.2.1°):

$$\begin{aligned}5,35 : 2 &= 2,675 \approx 2,68; & 5,35 : 0,2 &= 53,5 : 2 = 26,75 \approx 26,8; \\10 : 3,3 &= 100 : 33 = 3,030303 \dots \approx 3,03.\end{aligned}$$

3°. Целые числа и десятичные дроби можно записать в *нормализованной форме* (с порядковым множителем или без него). При этом целая часть содержит один разряд, а справа от числа записывается порядковый множитель (целая степень числа 10). Например,

$$31,4 = 3,14 \cdot 10^1$$

(читается «три и четырнадцать сотых на десять в первой»),

$$0,002184 = 2,184 \cdot 10^{-3}; \quad -18506700 = -1,85067 \cdot 10^7;$$

$$3 = 3,0 \cdot 10^0; \quad -30 = -3,0 \cdot 10^1 = -3 \cdot 10^1.$$

Дробную часть называют *мантиссой*, показатель степени числа 10 — *порядком*. Иногда под нормализованной формой понимается запись с нулевой целой частью:

$$3,14 = 0,314 \cdot 10^1; \quad 0,0018 = 0,18 \cdot 10^{-2}.$$

Сложение (вычитание) нормализованных чисел выполняют, предварительно «выравнивая» порядки:

$$\begin{aligned} 3,14 \cdot 10^2 + 1,3 \cdot 10^{-2} &= 3,14 \cdot 10^2 + 0,00013 \cdot 10^2 = \\ &= (3,14 + 0,00013) \cdot 10^2 = 3,14013 \cdot 10^2 \approx 3,14 \cdot 10^2. \end{aligned}$$

Если вычисления выполняются с округлениями, то возможна «потеря точности» (п. 10.1.3°).

Порядок действий при умножении (делении) нормализованных чисел:

1) умножают (делят) десятичные дроби, не обращая внимания на порядковые множители;

2) складывают (вычитают) порядки;

3) если надо, нормализуют и округляют результат.

Например:

$$\begin{aligned} 4,560 \cdot 10^4 \cdot 3,032 \cdot 10^{-3} &= \\ &= 13,82592 \cdot 10^1 = 1,382592 \cdot 10^2 \approx 1,383 \cdot 10^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3,14 \cdot 10^2 : 8,30 \cdot 10^3 &= \\ &= 0,37831325 \dots \cdot 10^{-1} \approx 3,7831325 \cdot 10^{-2} \approx 3,78 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Нормализованную запись чисел употребляют, в частности, при работе с приближенными числами (п. 1.3.2°).

4°. В некоторых случаях процесс деления «уголком» целых чисел (или десятичных дробей) оказывается бесконечным; результат имеет вид записи, в которой бесконечно повторяется одна и та же группа цифр. Такая бесконечная десятичная дробь называется *периодической*, а повторяющаяся группа цифр — *периодом* дроби; например,  $101/33 = 3,0606060606\dots$  — периодическая дробь с периодом (06). Для записи периодических дробей в скобках указывают период, в данном примере  $101/33 = 3,(06)$ . Периодическая часть может начинаться не сразу после запятой, например:  $47/30 = 1,566666\dots = 1,5(6)$ ; такие дроби называют *смешанными периодическими*.

Дробь  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, равна конечной десятичной дроби, если знаменатель  $n$  (после сокращений!) раскладывается только на множители 2 и 5; например,  $17/20 = 0,85$  — конечная десятичная дробь, но  $17/21 = 0,809523809523\dots = 0,(809523)$  — периодическая дробь.

Каждую периодическую дробь можно преобразовать в обыкновенную дробь вида  $m/n$  по следующим правилам:

1) если периодическая часть начинается сразу после запятой, то к целой части прибавляют обыкновенную дробь, числитель которой есть период, а знаменатель состоит из подряд написанных цифр 9, число которых равно числу цифр периода:

$$16,(809523) = 16 + \frac{809523}{999999} = 16\frac{17}{21};$$

2) если между запятой и периодической частью есть еще цифры, то предварительно переносят запятую к началу периодической части, пользуясь порядковым множителем:

$$1,5(6) = 15,(6) \cdot 10^{-1} = \left(15 + \frac{6}{9}\right) \cdot 10^{-1} = \frac{45 + 2}{3} : 10 = \frac{47}{30}.$$

Бесконечные непериодические дроби (иррациональные числа, см. п. 2.2.3°) невозможно точно записать в виде обыкновенной дроби.

### 1.3. Округление чисел. Приближенные числа

1°. При округлении десятичной дроби отбрасывают крайнюю правую цифру; при этом предыдущую цифру либо сохраняют, если отбрасывается одна из цифр 1, 2, 3, 4 (*округление с недостатком*), либо увеличивают на единицу, если отбрасывается одна из цифр 5, 6, 7, 8, 9 (*округление с избытком*):

$$41,32 \approx 41,3; \quad 41,36 \approx 41,4; \quad 41,35 \approx 41,4,$$

(знак  $\approx$  читается «приблизленно равно»). При отбрасывании цифры 5 иногда сохраняют предыдущую цифру, если она четная, и увеличивают ее на единицу, если она нечетная:

$$3,165 \approx 3,16 \approx 3,2 \approx 3, \quad \text{но} \quad 3,175 \approx 3,18.$$

При таких округлениях *погрешность округления*, т. е. разница между исходным числом и его приближенным представлением, не превосходит (по модулю) 5 единиц отбрасываемого разряда:

$$|3,165 - 3,16| \leq 0,005; \quad |3,16 - 3,2| \leq 0,05.$$

Иногда применяют более грубое правило округления — просто отбрасывают крайнюю правую цифру, тогда погрешность округления не превосходит 10 единиц отбрасываемого разряда, т. е. 1 единицы предыдущего разряда:

$$|3,18 - 3,1| \leq 0,1.$$

Округление целых чисел выполняется аналогично; при этом на месте отбрасываемой цифры записывают цифру 0:

$$38\,074 \approx 38\,070 \approx 38\,100 \approx 38\,000 \approx 40\,000.$$

Округление чисел применяют в тех случаях, когда точное вычисление невозможно или нецелесообразно или точная запись результата не имеет практического смысла, например при действиях над приближенными числами (п. 1.3.2°).

2°. В результате округлений получаются *приближенные числа*, т. е. числа, близкие к исходным. Приближенные числа возникают также в результате измерений физических величин (расстояний, промежутков времени, массы, температуры и т. д.), так как любое измерение выполняется с ограниченной точностью, зависящей от погрешности измерительного прибора.

Приближенные числа записывают в нормализованной форме, при этом длина дробной части характеризует точность приближенного числа; пишут только «верные» цифры, истинность которых не вызывает сомнений. Например, запись «диаметр Земли равен  $1,27 \cdot 10^7$  м» означает, что цифры 1, 2, 7 установлены надежно, а дальнейшие цифры неизвестны, или несущественны, или не имеют смысла (форма Земли отличается от сферической). Запись приближенного числа может оканчиваться нулем — это означает, что цифра 0 верная: записи  $3,50 \cdot 10^{-1}$  и  $3,5 \cdot 10^{-1}$  имеют различный смысл. Принято считать, что погрешность приближенного числа не превосходит половины единицы разряда последней верной цифры.

При вычислениях с приближенными числами следует помнить, что окончательный результат не может содержать больше значащих цифр (иметь большую разрядность), чем наименее точное из исходных данных. В промежуточных вычислениях следует сохранять один-два «запасных» разряда.

При вычислениях с округлениями (в том числе при работе с ЭВМ) следует избегать случаев «потери точности» из-за вычитания близких чисел и из-за неудачного порядка арифметических действий (п. 10.1.3°).

#### 1.4. Метод математической индукции

В некоторых случаях формулы или утверждения (в частности, равенства или неравенства), содержащие целочисленную переменную величину  $n \geq 1$ , можно доказать с помощью *метода математической индукции*. Такое доказательство проводится в два этапа:



1) данное утверждение проверяют для  $n = 1$  («база индукции»);

2) предположив, что данное утверждение справедливо для  $n = k$ , проверяют, что из этого предположения вытекает его справедливость для  $n = k + 1$  («индукционный шаг»); тем самым утверждение оказывается справедливым для  $n = 2, n = 3, n = 4, \dots$ , т. е. для любого значения  $n$ .

Если данное утверждение надо доказать для  $n \geq n_0$ , то базу берут при  $n = n_0$ .

### Пример

Докажем, что при всех  $n \geq 1$  справедливо равенство (п. 5.1.5°)

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для  $n = 1$  равенство очевидно. Предположим, что

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Составляя выражение

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1)$$

и заменяя в нем сумму первых  $k$  слагаемых на  $k(k+1)/2$ , получаем

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

что и требовалось доказать.

*Замечание.* Методом математической индукции осуществляется не вывод новых формул (утверждений), а только доказательство предполагаемых формул (утверждений).

## 2. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ

Понятия множества, действительного числа, функции относятся к фундаментальным понятиям математического анализа. Рассматриваются натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа, общее понятие и основные характеристики функциональной зависимости, приводятся свойства и графики некоторых важнейших элементарных функций.

### 2.1. Множества

1°. *Множество* — это совокупность, набор, собрание элементов, объединяемых по какому-либо признаку. Например, множество студентов, множество целых чисел, множество планет Солнечной системы, множество точек на окружности. Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ , то пишут  $x \in A$ ; если  $x$  не принадлежит  $A$ , то пишут  $x \notin A$ . Множество, не имеющее элементов, называют пустым и обозначают  $\emptyset$ . Примеры пустых множеств: множество тупых углов равностороннего треугольника, множество действительных корней уравнения  $x^2 + 1 = 0$ , множество людей старше 300 лет.

Иногда удобно явно указывать элементы множества: запись  $\{1; 2; 3; 4\}$  означает множество, состоящее из элементов 1, 2, 3, 4; запись  $\{x \mid x^2 < 1\}$  читается «множество таких  $x$ , для которых  $x^2 < 1$ ».

Два множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, например:

$$\{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-2; -1\} = \{-1; -2\}.$$

*Объединение* множеств  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \cup B$ ) — это множество, составленное из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств, например:

$$\begin{aligned}\{1; 3; 4\} \cup \{0; 2\} &= \{0; 1; 2; 3; 4\}; \\ \{1; 3; 4\} \cup \{0; 1; 2; 3\} &= \{0; 1; 2; 3; 4\}.\end{aligned}$$

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел есть множество действительных чисел (§ 2.2).

*Пересечение* множеств  $A$  и  $B$  (обозначается  $A \cap B$ ) — это множество, составленное из элементов, принадлежащих одновременно обоим множествам, например:

$$\begin{aligned}\{1; 3; 4\} \cap \{0; 2\} &= \emptyset; \\ \{1; 3; 4\} \cap \{0; 1; 2; 3\} &= \{1; 3\}.\end{aligned}$$

Пересечение множества целых чисел и множества натуральных чисел есть множество натуральных чисел (п. 2.2.1°).

**2°.** *Подмножество*  $P$  данного множества  $A$  (обозначается  $P \subseteq A$ ) — это множество, составленное из некоторых элементов множества  $A$ , т. е. подмножество есть часть данного множества. При этом не исключены случаи  $P = A$  или  $P = \emptyset$ . Примеры подмножеств: множество натуральных чисел есть подмножество множества целых чисел; целые числа составляют подмножество множества действительных чисел; действительные числа составляют подмножество множества комплексных чисел (§ 7.1). Запись  $\{x \in A \mid L\}$  означает подмножество множества  $A$ , элементы которого удовлетворяют условию  $L$ ; например,  $x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 9$  есть подмножество множества  $\mathbb{Z}$  целых чисел, больших  $-2$  и меньших  $9$ .

Число всех подмножеств множества, состоящего из  $n$  элементов, равно  $2^n$ . (В это число входят само множество и пустое множество.)

**3°.** Часто встречаются числовые множества, называемые *промежутками*:

- 1) замкнутый промежуток, или отрезок:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$$

- 2) открытый промежуток, или интервал:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

(иногда для интервалов используют обозначение  $]a; b[$ );

3) полуоткрытые промежутки:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

(в других обозначениях  $]a; b]$  и  $[a; b[$  соответственно);

4) бесконечные промежутки (лучи, полупрямые):

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}; \quad (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ (прямая).}$$

## 2.2. Действительные числа

1°. *Натуральные числа* — это числа, используемые для счета: 1, 2, 3, ... Множество натуральных чисел обозначают символом  $\mathbb{N}$ . В этом множестве определены операции сложения и умножения; обратные операции (вычитание и деление) применимы не ко всем натуральным числам.

Говорят, что натуральное число  $m$  делится на натуральное число  $n$ , если существует натуральное число  $l$  такое, что  $m = n \cdot l$ ; например, 12 делится на 3, но не делится на 5. Любое натуральное число делится на единицу и на само это число.

Натуральные числа, на которые делится данное число, называются *делителями* этого числа; например, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 — делители числа 12; 1 и 7 — делители числа 7.

*Простое* число — это натуральное число  $m > 1$ , которое имеет только два делителя: единицу и само  $m$  (например, 2, 3, 7, 11, 17, 23, ...). Простых чисел бесконечно много.

Некоторые теоремы о простых числах:

1) для любого натурального  $n$  между  $n$  и  $n!$  (§ 6.1) содержится по меньшей мере одно простое число;

2) натуральное число  $p > 2$  простое в том и только в том случае, когда число  $(p - 2)! - 1$  делится на  $p$  (Лейбниц);

3) каждое простое число вида  $4n + 1$  есть сумма квадратов двух натуральных чисел (Ферма).

Натуральные числа, не являющиеся простыми, называются *составными*. Все четные числа, кроме 2, — составные. Основная теорема арифметики: любое натуральное число, отличное от единицы, может быть единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разложено на простые множители.

Некоторые признаки делимости натуральных чисел:

- 1) число делится на 2, если его последняя цифра есть четное число или ноль;
- 2) число делится на 4, если две его последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 4;
- 3) число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3; число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9;
- 4) число делится на 5, если оно оканчивается нулем или цифрой 5.

*Целые числа*:  $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  Множество целых чисел обозначается символом  $\mathbb{Z}$ . Натуральные числа — это целые положительные числа.

Для натуральных чисел вводится *деление с остатком* — операция, сопоставляющая паре натуральных чисел  $m$  и  $n$  пару целых чисел  $l$  и  $r$  таких, что  $m = l \cdot n + r$ , причем  $0 \leq l$ ,  $0 \leq r < n$ . Число  $l$  называют *частным*,  $r$  — *остатком*. Результат деления с остатком записывают в виде  $m/n = l + r/n$ .

Например,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7} = 0 + \frac{3}{7}; \quad \frac{12}{3} = 4 + \frac{0}{3}.$$

*Общий делитель* двух натуральных чисел  $m$  и  $n$  — натуральное число  $p$ , являющееся делителем числа  $m$  и числа  $n$ . Среди общих делителей двух данных натуральных чисел имеется *наибольший общий делитель* (НОД). Для нахождения НОД чисел  $m$  и  $n$  можно разложить эти числа на простые множители и составить НОД как произведение всех простых множителей, общих для данных чисел.

Например,  $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ ;  $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ ; следовательно,  $\text{НОД} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ .

Для быстрого нахождения НОД применяют алгоритм Евклида: пусть заданы натуральные числа  $m$  и  $n$ , причем  $m > n$ . Делим с остатком  $m$  на  $n$ , получаем остаток  $r_1$ ; если  $r_1 = 0$ , то  $\text{НОД} = n$ . При  $r_1 \neq 0$  делим с остатком  $n$  на  $r_1$ , получаем остаток  $r_2$ ; если  $r_2 = 0$ , то  $\text{НОД} = r_1$ . При  $r_2 \neq 0$  делим с остатком  $r_1$  на  $r_2$ , и т. д.

Например,

$$m = 3780; \quad n = 600; \quad r_1 = 180; \quad r_2 = 60; \quad r_3 = 0;$$

следовательно,  $\text{НОД} = r_2 = 60$ .

2°. *Рациональные числа* имеют вид  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа ( $n \neq 0$ ). Если  $n = 1$  (или  $m$  делится на  $n$  без остатка), то рациональное число  $m/n$  совпадает с целым числом; в противном случае рациональное число  $m/n$  является дробным числом (п. 1.1.4°). Множество рациональных чисел обозначается символом  $\mathbb{Q}$ . Очевидно,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Каждое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби (п. 1.2.4°).

3°. *Иррациональные числа* можно определить как бесконечные непериодические десятичные дроби. Иррациональное число ни при каких целых  $m$  и  $n$  ( $n \neq 0$ ) нельзя представить в виде дроби  $m/n$ . Например,  $0,101001000100001\dots$  есть иррациональное число (эта бесконечная десятичная дробь непериодическая, так как число нулей между единицами возрастает). Числа

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots, \sqrt{3} = 1,73205\dots, \pi = 3,14159\dots, e = 2,71828\dots$$

также служат примерами иррациональных чисел. Очевидно, если  $p$  — иррациональное число, то произведение  $pn$  не является целым числом ни при каких натуральных  $n$ .

Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел есть множество *действительных* или *вещественных* чисел (обозначается символом  $\mathbb{R}$ ).

Действительные числа геометрически изображаются точками числовой оси  $x$ , причем расстояние от начала отсчета 0 до точки, изображающей число  $b$ , равно  $|b|$ . Точки, изображающие действительные числа, расположены «всюду плотно» на оси: между любыми двумя действительными числами найдется бесконечно много действительных чисел. Свойством плотности обладают также множества иррациональных и рациональных чисел. Любое иррациональное число можно как угодно точно приближать рациональными числами, в частности конечными десятичными дробями, имеющими все более длинные дробные части; например,

$$\sqrt{2} = 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad 1,41421, \quad \dots$$

При практических вычислениях с ограниченной точностью различие между рациональными и иррациональными числами не проявляется.

4°. Операции сложения и умножения действительных чисел обладают свойствами:

- 1) коммутативности:  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$ ;
- 2) ассоциативности:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $(ab)c = a(bc)$ ;
- 3) дистрибутивности:  $(a + b)c = ac + bc$ .

### 2.3. Функции

1°. Пусть  $X$  — некоторое множество чисел (например, промежутков). Если задано правило, которое каждому числу  $x \in X$  сопоставляет какое-нибудь число  $y$ , то такое правило называют *функцией* и записывают в виде  $y = f(x)$  или  $y = y(x)$ . Запись  $y = f(x)$  (читается « $y$  равен  $f$  от  $x$ ») означает, что функция  $f$  числу  $x$  сопоставляет число  $y$ . При этом  $x$  называется *значением аргумента* функции  $f$  или  $f(x)$ ,  $y$  — *значением функции*, соответствующим значению аргумента  $x$ , или значением функции в точке  $x$ .

Множество  $X$  чисел  $x$ , на котором задана функция  $f$ , называется *областью определения* функции (обозначается  $D(f)$ ). Множество чисел вида  $f(x)$ , где  $x \in D(f)$ , называется *областью значений* функции (обозначается  $R(f)$ ).

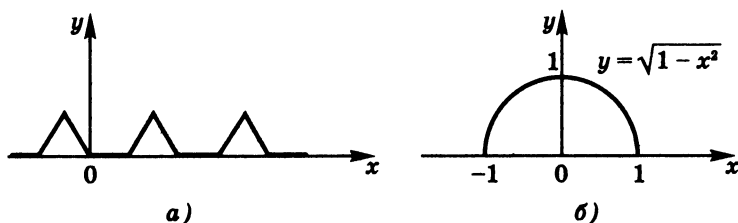


Рис. 2.1.

$a$  — графическое задание функции,  
 $b$  — график функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

Способы задания функции: аналитический (формулой), например  $y = x^2$ ,  $y = \sin 3x$ ,  $y = \ln x$ ; графиком (рис. 2.1,  $a$ ); таблицей; словесным описанием. В физике и технике наиболее важны функции, заданные формулами или графиками.

2°. Если  $y = f(x)$ , то говорят, что переменные  $x$  и  $y$  связаны функциональной зависимостью;  $x$  называется независимой переменной,  $y$  — зависимой переменной. Идея функциональной зависимости широко используется в физике; например, при движении точки пройденный ею путь есть функция времени, давление газа в замкнутом сосуде есть функция его температуры, сила взаимодействия двух электрических зарядов есть функция расстояния между зарядами.

### Замечания

1) Данное выше понятие функции относится к однозначным функциям; иногда рассматривают многозначные функции, которые каждому значению аргумента  $x$  сопоставляют несколько значений  $y$ ; такова например, двужначная функция  $y = \pm\sqrt{x}$ .

2) Во многих задачах математики, физики, техники встречаются функции нескольких переменных:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а также вектор-функции (например, радиус-вектор  $r = r(t)$ , см. п. Ф2.1.1°).



### Примеры

$$1) y = x^2 + 1, \text{ здесь } D(f) = (-\infty, +\infty), R(f) = [1, +\infty);$$

$$2) y = \sqrt{-x^2}, D(f) = R(f) = \{0\};$$

$$3) y = (x^2 + 8)/(x - 1), D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), \\ R(f) = (-\infty, -4] \cup [8, +\infty);$$

$$4) y = \sin x, D(f) = (-\infty, +\infty), R(f) = [-1; 1].$$

3°. Введем на плоскости прямоугольную систему координат  $xy$  (§ 8.3). *График* функции  $f(x)$  — это множество точек на плоскости, имеющих координаты  $(x, y)$ , где  $y = f(x)$ . Таким образом, когда аргумент  $x$  пробегает область определения функции  $f(x)$ , точка  $(x, f(x))$  на плоскости пробегает график функции. Обычно график функции — некоторая «гладкая» кривая. На рис. 2.1, б изображен график функции  $y = \sqrt{1 - x^2}$  (полуокружность). Графики функций широко применяются для наглядного изображения характера функциональной зависимости (практические приемы построения графиков см. в п. 5.4.3°, п. 5.4.4°).

## 2.4. Основные свойства функций

1°. *Монотонность*. Функция  $f(x)$  называется *возрастающей* на промежутке  $(a, b)$ , если бóльшим значениям аргумента соответствуют бóльшие значения функции:

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1. \quad (2.1)$$

Здесь предполагается, что промежуток  $(a, b)$  лежит в области определения функции и что  $x_1, x_2$  — любые точки из  $(a, b)$ . Если вместо (2.1) выполняется

$$f(x_2) < f(x_1) \text{ при } x_2 > x_1, \quad (2.2)$$

функция называется *убывающей* на промежутке  $(a, b)$ . Если функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на всей своей области определения, она кратко называется *возрастающей* (*убывающей*).

Если вместо (2.1) выполняется неравенство  $f(x_2) \geq f(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ , функция называется *неубывающей*; если  $f(x_2) \leq f(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ , функция *невозрастающая*.

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*; неубывающие и невозрастающие функции — *монотонными в широком смысле*.

При движении  $x$  слева направо график возрастающей функции поднимается вверх, график убывающей функции опускается вниз. Функция может возрастать или убывать на отдельных промежутках; например,  $y = \sqrt{1 - x^2}$  убывает при  $x > 0$  и возрастает при  $x < 0$  (рис. 2.1, б).

Достаточное условие монотонности на промежутке  $(a, b)$  функции  $f(x)$ , дифференцируемой на этом промежутке (§ 5.4):

$$f'(x) \neq 0 \text{ при всех } x \in (a, b).$$

При этом  $f'(x) > 0$  соответствует возрастанию,  $f'(x) < 0$  — убыванию функции (в данных неравенствах можно допустить обращение  $f(x)$  в нуль в отдельных точках).

### Примеры

1)  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 2)(x - 4)}{(x - 1)^2}$ . Знак полученного дробного выражения можно исследовать методом интервалов (п. 3.7.5°). Результат:  $f'(x) > 0$  при  $x < -2$  и при  $x > 4$ , здесь функция  $f(x)$  возрастает;  $f'(x) < 0$  при  $-2 < x < 4$ ,  $x \neq -1$ , здесь  $f(x)$  убывает.

2)  $y = x^3$ . Функция возрастает при всех  $x \in \mathbb{R}$ , несмотря на то, что  $y'(0) = 0$ .

2°. *Периодичность*. Функция  $f(x)$  называется *периодической*, если значения функции не меняются при изменении значений аргумента на некоторое постоянное число  $T \neq 0$ : для любых  $x$  из области определения функции точки  $x \pm T$  также принадлежат области определения и имеют место равенства

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Число  $T$  называется *периодом* функции; если  $T$  — период, то  $mT$  — также период для любого целого  $m \neq 0$ . Обычно под термином «период» подразумевают наименьший положительный период; например,  $\sin x$  и  $\cos x$  имеют наименьший период  $2\pi$ .

График периодической функции состоит из бесконечно повторяющихся одинаковых кусков кривой (рис. 2.2). В физике периодические функции описывают колебательные процессы (§ 5.1).

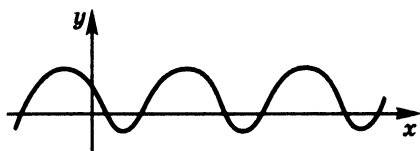


Рис. 2.2.  
Периодическая функция

**3°. Четность и нечетность.** Функция  $f(x)$  называется *четной*, если для любых  $x$  из ее области определения выполняется равенство

$$f(-x) = f(x). \quad (2.3)$$

При этом предполагается, что область определения функции симметрична относительно точки  $x = 0$ . Функция  $f(x)$  называется *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x). \quad (2.4)$$

Примеры четных функций:  $\cos x$ ,  $x^{2n}$ ,  $|x|$ ; нечетных:  $\sin x$ ,  $x^{2n+1}$ ,  $x/|x|$ .

График четной функции симметричен относительно оси  $y$ , график нечетной — относительно начала координат. Функция может не иметь свойств четности или нечетности; например,  $y = x^2 + x$ .

Любую функцию (с симметричной областью определения) можно представить как сумму четной и нечетной частей:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

— четная и нечетная части соответственно.

Сумма или разность двух четных (нечетных) функций четна (нечетна), произведение двух четных или двух нечетных функций четно, произведение четной функции на нечетную нечетно.

**4°. Ограниченность.** Функция  $f(x)$  называется ограниченной, если при всех  $x$  из ее области определения выполняется неравенство  $|f(x)| \leq M$  или неравенство  $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ , где  $M, M_1, M_2$  — какие-либо постоянные числа.

Примеры ограниченных функций:  $|\sin x| \leq 1, 0 \leq e^{-|x|} \leq 1, |\operatorname{arctg} x| \leq \pi/2$ . Примеры неограниченных функций:  $1/x, \operatorname{tg} x, 2^x, \ln x$ .

## 2.5. Обратная функция

**1°. Соответствие между элементами двух множеств  $A$  и  $B$**  называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу  $a \in A$  соответствует точно один элемент  $b \in B$ , и обратно, каждому элементу  $b \in B$  соответствует точно один элемент  $a \in A$ .

Если функция  $f$  задает взаимно однозначное соответствие между своей областью определения  $X$  и своей областью значений  $Y$ , то говорят, что функция  $f$  имеет *обратную функцию* или что функция  $f$  *обратима*. Обратная функция, по определению, — это правило, которое каждому числу  $y \in Y$  сопоставляет число  $x \in X$ , причем  $y = f(x)$ . Область определения обратной функции есть  $Y$ , область значений —  $X$ . Для обратных функций обычно применяют специальные обозначения; например, если  $y = e^x$ , то  $x = \ln y$  (логарифм есть обратная функция для показательной функции).

Функция, обратная к обратной для заданной, равна этой заданной (исходной) функции; например,

$$e^{\ln(e^x)} = e^x.$$

Исходную функцию и ее обратную вместе называют *взаимно обратными*; например, логарифм и показательная функция — взаимно обратные функции.

2°. Все строго монотонные функции — как возрастающие, так и убывающие — имеют обратные; обратные функции при этом также строго монотонные. Если исходная функция  $f(x)$  немонотонна, то некоторые свои значения она может принимать два или несколько раз (например,  $y = x^2$  или  $y = \sin x$ ). В этом случае для введения обратной функции область определения функции  $f(x)$  разбивают на участки монотонности  $f(x)$  и с каждым таким участком связывают свою обратную функцию.

### Примеры

1)  $y = x^2$ . Здесь определяют две обратные функции  $x = \sqrt{y}$  и  $x = -\sqrt{y}$ , так как имеются два промежутка монотонности  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$  исходной функции. Каждая из обратных функций  $\sqrt{y}$  и  $-\sqrt{y}$  дает однозначное отображение полуоси  $y \geq 0$  на свою часть области определения  $(-\infty, +\infty)$  исходной функции  $y = x^2$ .

2)  $y = \sin x$ . Для  $x \in [-\pi/2; \pi/2]$  обратная функция  $x = \arcsin y$  (§ 4.3).

3°. Графики исходной функции  $y = f(x)$  и обратной функции  $y = f^{-1}(x)$  симметричны относительно биссектрисы I–III квадрантов, поэтому график обратной функции можно получить переворачиванием вокруг этой биссектрисы плоскости, на которой изображен график исходной функции (рис. 2.3).

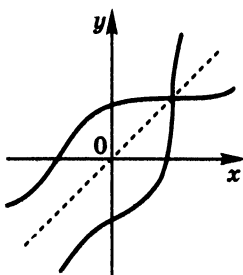


Рис. 2.3.  
Взаимно обратные функции

## 2.6. Линейная и квадратичная функции.

### Модуль действительного числа

1°. Функция вида  $y = ax + b$  называется *линейной*; здесь  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты. Область определения:  $x \in \mathbb{R}$ . Область значений: если  $a \neq 0$ , то  $Y = \mathbb{R}$ , т. е. значения линейной функции пробегают всю действительную ось; при  $a = 0$  функция вырождается в постоянную  $y = b$ .

График линейной функции — прямая линия (рис. 2.4). Коэффициент  $a$  называется угловым коэффициентом прямой линии, так как  $a = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона прямой к оси  $x$  (отсчитывается против часовой стрелки от положительной полуоси).

Линейная функция монотонна при всех  $x$ : возрастает, если  $a > 0$ ; убывает, если  $a < 0$ . При  $a \neq 0$  нет периодичности. При  $b = 0$  зависимость  $y = ax$  называется пропорциональной; это — нечетная функция. Обратная функция существует при  $a \neq 0$ ,  $x = (y - b)/a$  и также является линейной функцией.

Примеры физических применений линейной функции: путь  $s = vt$  при равномерном движении и скорость  $v = v_0 + at$  при равноускоренном движении — линейные функции времени.

Линейную функцию иногда рассматривают на множестве  $\mathbb{C}$  комплексных чисел (§ 7.1); при  $a \neq 0$  она взаимно однозначно отображает  $\mathbb{C}$  на  $\mathbb{C}$ .

2°. *Квадратичная функция* или *квадратный трехчлен* — это функция вида  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a \neq 0$ . Область определения:  $x \in \mathbb{R}$ ; область значений:  $[m, +\infty)$  при  $a > 0$ ,  $(-\infty, M]$  при  $a < 0$  ( $m$  — минимальное,  $M$  — максимальное значение, см. ниже). В случае  $b = c = 0$  график квадратичной функции  $y = ax^2$  — *парабола*, вершина которой — в начале координат, ось симметрии совпадает с осью  $y$  (рис. 2.5, а). В общем слу-

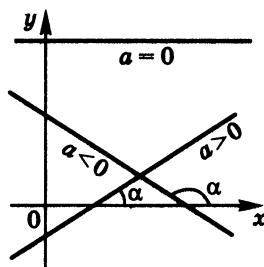


Рис. 2.4.  
Наклон прямой  $y = ax + b$   
в зависимости от  $a$

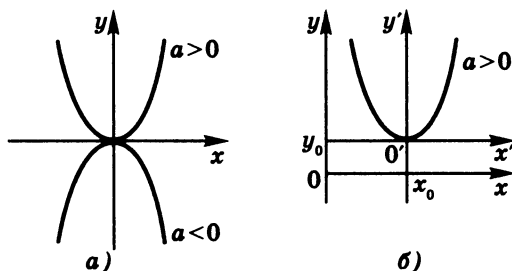


Рис. 2.5.

- a* — возможные случаи расположения параболы  $y = ax^2$  на плоскости  $xy$ ;  
*б* — параллельный перенос системы координат

чае квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  может быть приведен к *каноническому виду*:

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где  $x_0 = -b/2a$ ,  $y_0 = -D/4a$ ,  $D$  — *дискриминант* ( $D = b^2 - 4ac$ ).

В новой системе координат  $x'y'$ , где  $x' = x - x_0$ ,  $y' = y - y_0$ , уравнение  $y = ax^2 + bx + c$  имеет вид  $y' = a(x')^2$ . Система координат  $x'y'$  получается из системы  $xy$  сдвигом по оси  $x$  на  $x_0$ , по оси  $y$  — на  $y_0$  (рис. 2.5, б).

Отсюда следует, что график квадратичной функции общего вида  $y = ax^2 + bx + c$  — парабола, полученная параллельным переносом параболы вида  $y = ax^2$ . Координаты вершины параболы:  $P(-b/2a, -D/4a)$ . Если  $a > 0$ , то  $P$  — точка минимума функции  $ax^2 + bx + c$ , при этом  $m = -D/4a$ ; если  $a < 0$ , то  $P$  — точка максимума,  $M = -D/4a$ . Левее и правее вершины параболы квадратичная функция монотонна. При  $b = 0$  функция четная.

При любых значениях коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  график квадратичной функции один раз пересекает ось  $y$  (при  $y = c$ ). Число точек пересечения с осью  $x$  зависит от дискриминанта  $D$ : если  $D < 0$ , парабола не имеет общих точек с осью  $x$ ; если  $D = 0$ , то общая точка одна (касание при  $x = -b/2a$ ); если  $D > 0$ , то имеются две точки пересечения (п. 3.2.2°).

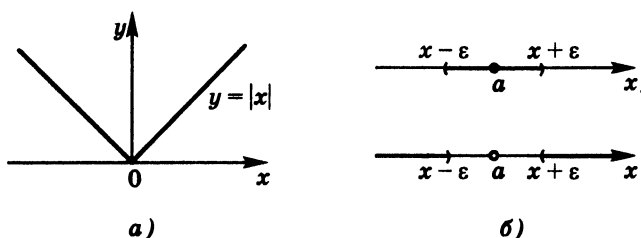


Рис. 2.6.

$a$  — график функции  $y = |x|$ ;

$b$  — к решению неравенств  $|x - a| < \varepsilon$  и  $|x - a| > \varepsilon$

Если дискриминант  $D > 0$ , то квадратный трехчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена (§ 3.2). Если  $D = 0$ , т. е.  $x_1 = x_2$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ . Если  $D < 0$ , то в области действительных чисел разложение вида  $a(x - x_1)(x - x_2)$  невозможно, в области комплексных чисел такое разложение всегда возможно (§ 7.1, 3.3).

**Физические приложения квадратичной функции:** координата точки при равноускоренном движении как функция времени (п. Ф2.1.4°), потенциальная энергия растягиваемой пружины как функция удлинения (п. Ф2.4.6°).

**3°. Модуль (или абсолютная величина)** действительного числа  $x$  определяется следующим образом:  $|x| = x$ , если  $x \geq 0$ ;  $|x| = -x$ , если  $x < 0$ . Таким образом, всегда  $|x| \geq 0$ . Область определения функции  $y = |x|$ :  $x \in \mathbb{R}$ ; область значений:  $y \geq 0$ . Функция четная. График имеет вид прямого угла (рис. 2.6, а).

Некоторые свойства модуля:

$$\begin{aligned} |ax| &= |a| \cdot |x|, & |-x| &= |x|, & \sqrt{x^2} &= |x|, \\ |a + b| &\leq |a| + |b|, & |a - b| &\geq ||a| - |b||. \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Неравенство  $|x - a| < \varepsilon$  равносильно двойному неравенству  $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$  или  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ . Неравенство  $|x - a| > \varepsilon$  равносильно совокупности неравенств  $x - a > \varepsilon$ ,  $x - a < -\varepsilon$  или  $x < a - \varepsilon$ ,  $x > a + \varepsilon$ . Другими словами, неравен-



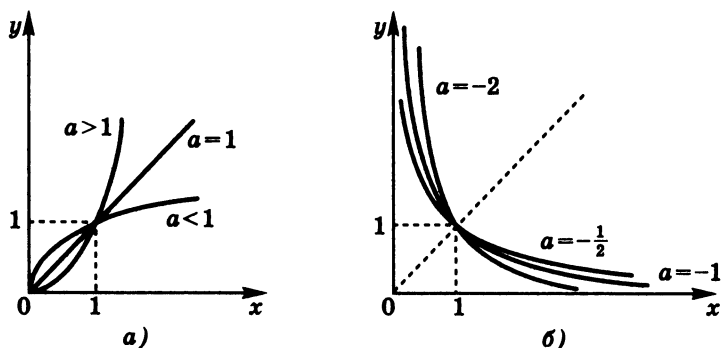


Рис. 2.7.

Графики степенной функции  $y = x^a$  при  $a > 0$  (а) и  $a < 0$  (б)

ство  $|x - a| < \varepsilon$  выполняется на промежутке  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ; неравенство  $|x - a| > \varepsilon$  — на объединении двух полупрямых (рис. 2.6, б)

$$x \in (-\infty, a - \varepsilon) \cup (a + \varepsilon, +\infty).$$

## 2.7. Степенная функция

1°. Функция  $y = x^a$  называется *степенной*; здесь  $a$  (*показатель степени*) — любое действительное число. Область определения:  $x > 0$ , т. е.  $x \in (0, +\infty)$ ; область значений:  $y > 0$ , т. е.  $y \in (0, +\infty)$ . Степенная функция монотонная: при  $a > 0$  возрастающая, при  $a < 0$  убывающая. Графики имеют различный вид в зависимости от  $a$  (рис. 2.7).

2°. Для целых значений показателя степени  $a \in \mathbb{Z}$  степенную функцию рассматривают при  $a > 0$  на всей числовой оси, при  $a < 0$  — на всей оси, кроме точки  $x = 0$ , где функция имеет бесконечный разрыв (п. 5.3.2°). При  $a = -1$  зависимость  $y = 1/x$  (или  $y = k/x$ ) называется *обратной пропорциональностью*. Например, закон Ома (п. Ф4.2.1°) утверждает, что сила тока на участке цепи при заданном напряжении обратно пропорциональна сопротивлению.

На рис. 2.8 изображены графики степенных функций  $y = x^3$ ,  $y = x^4$ ,  $y = x^{-1}$  (равнобочная гиперболa, см. п. 9.3.3°),

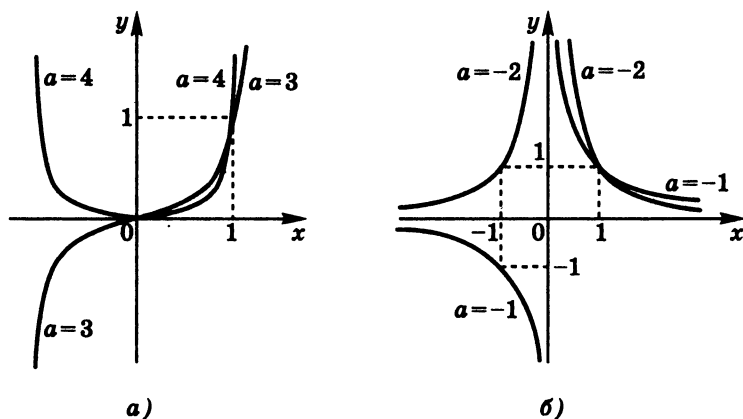


Рис. 2.8.

Графики степенной функции  $y = x^a$  при целых  $a$

$y = x^{-2}$ . При целочисленных показателях четность степенной функции совпадает с четностью показателя.

3°. Для некоторых дробных показателей степенную функцию также можно рассматривать на расширенной области определения: если  $a = m/n > 0$ , где  $n$  — нечетное целое число,  $m$  — целое, то  $y = x^{m/n}$  можно задавать на всей действительной оси; при  $a < 0$  надо выбрасывать точку  $x = 0$ . В частности, функция  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$  определена при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , а функция  $x^{-1/3}$  — при  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . При четном  $n$  и  $m/n > 0$  функция  $x^{m/n}$  (в частности,  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ) определена при  $x \geq 0$ .

## 2.8. Показательная, гиперболические и логарифмическая функции

1°. Показательная функция имеет вид  $y = a^x$ , где *основание*  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Область определения:  $x \in \mathbb{R}$ ; область значений:  $y \in (0, +\infty)$ . Основное свойство показательной функции:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2},$$

т. е. сумме значений аргумента соответствует произведение значений функции. Отметим также, что  $a^0 = 1$ ,  $a^1 = a$ ,  $a^x > 0$ .

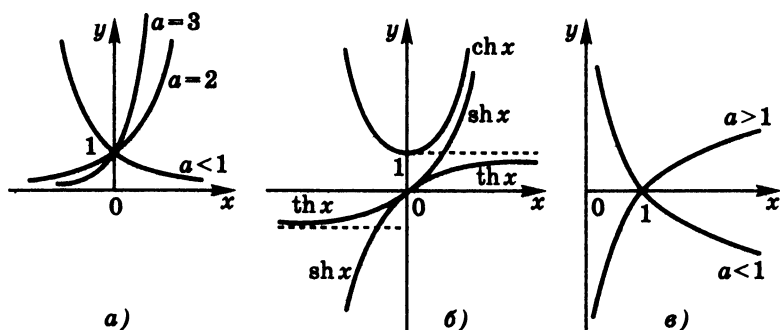


Рис. 2.9.

Графики показательной функции  $y = a^x$  (а), гиперболических функций (б) и логарифмической функции  $y = \log_a x$  (в)

Показательная функция монотонна: при  $a > 1$  она возрастающая, при  $a < 1$  — убывающая (рис. 2.9, а). При  $a > 1$  показательная функция очень быстро растет, когда  $x \rightarrow +\infty$  («экспоненциальный рост» — быстрее любой степени  $x$ ).

Чаще других оснований используется число  $e$  (п. 5.1.8°). Функция  $e^x$  называется *экспонентой* и иногда обозначается  $\exp x$ . Экспоненциальная зависимость часто встречается в природе; например, при радиоактивном распаде активность радиации экспоненциально убывает со временем (п. Ф7.6.2°).

2°. Выражения  $e^{\pm x}$  часто встречаются в следующих стандартных комбинациях:

- 1)  $\text{ch } x = (e^x + e^{-x})/2$  (*гиперболический косинус*);
- 2)  $\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2$  (*гиперболический синус*);
- 3)  $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  (*гиперболический тангенс*).

*Гиперболические функции*, в отличие от тригонометрических, неперiodичны (рис. 2.9, б). Свойства этих функций:  $\text{ch } x$  четная,  $\text{sh } x$  и  $\text{th } x$  нечетные. Функции  $\text{ch } x$  и  $\text{sh } x$  не ограничены,  $\text{th } x$  ограничена:  $|\text{th } x| < 1$ ; при  $x \rightarrow \pm\infty$  функция  $\text{th } x \rightarrow \pm 1$ . Имеют место формулы

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1; & \text{ch } 2x &= \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x; \\ \text{sh}(x \pm y) &= \text{sh } x \cdot \text{ch } y \pm \text{ch } x \cdot \text{sh } y; \\ \text{ch}(x \pm y) &= \text{ch } x \cdot \text{ch } y \pm \text{sh } x \cdot \text{sh } y. \end{aligned}$$

3°. *Логарифмическая функция*  $y = \log_a x$  (читается « $y$  равен логарифму  $x$  по основанию  $a$ »), где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , является обратной функцией по отношению к показательной: если  $y = a^x$ , то  $x = \log_a y$ . Область определения:  $x \in (0, +\infty)$ ; область значений: вся действительная ось,  $y \in \mathbb{R}$ .

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x \text{ при } x \in (0, +\infty).$$

Свойства логарифмов (все аргументы считаем положительными):

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2; \quad \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

$$\log_a x^b = b \log_a x; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \frac{\log_b x}{\log_b a}; \quad \log_{1/a} x = -\log_a x.$$

### Примеры

$$1) \log_{1/3} 45 = -\log_3 (5 \cdot 3^2) = -\log_3 5 - \log_3 3^2 = -\log_3 5 - 2;$$

$$\begin{aligned} 2) 4^{-\log_{\sqrt{2}} x} &= (\sqrt{2}^4)^{-\log_{\sqrt{2}} x} = \\ &= (\sqrt{2})^{-4 \log_{\sqrt{2}} x} = \sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} (x^{-4})} = x^{-4}. \end{aligned}$$

Логарифмы с основанием 10 называются *десятичными* (обозначаются  $\lg x$ ); с основанием  $e$  — *натуральными* (обозначаются  $\ln x$ ; о числе  $e$  см. в п. 5.1.8°). Связь натуральных и десятичных логарифмов:

$$\lg x = \ln x \cdot \lg e = \frac{\ln x}{\ln 10},$$

где  $\lg e \approx 0,434$ ;  $\ln 10 \approx 2,30$ .

Логарифмическая функция монотонна: при  $a > 1$  она возрастающая, при  $a < 1$  — убывающая (рис. 2.9, в).

### 3. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. НЕРАВЕНСТВА

Многие физические и математические задачи связаны с исследованием и решением уравнений, систем уравнений и неравенств. В данной главе обсуждаются общие свойства уравнений и неравенств, рассматриваются линейное, квадратное и биквадратное уравнения, общие свойства многочленов и алгебраических уравнений, иррациональные уравнения и уравнения с модулями, линейные и нелинейные системы уравнений.

#### 3.1. Общие понятия

1°. Уравнением с одним неизвестным  $x$  называется соотношение вида

$$f(x) = 0, \quad (3.1)$$

где  $f(x)$  — какая-либо заданная функция действительного или комплексного переменного  $x$ . Встречаются также уравнения вида  $f(x) = g(x)$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  — две заданные функции ( $f(x)$  — левая часть,  $g(x)$  — правая часть уравнения). Переносом  $g(x)$  в левую часть получаем  $f(x) - g(x) = 0$  — уравнение вида (3.1).

Уравнение следует рассматривать в области допустимых значений (ОДЗ), т. е. на множестве чисел  $x$ , на котором определены все входящие в уравнение функции. Для уравнения (3.1) ОДЗ совпадает с областью определения функции  $f(x)$ ; для уравнения  $f(x) = g(x)$  ОДЗ есть пересечение областей определения левой и правой частей.

Решить уравнение (3.1) — значит найти его *корни* (или *решения*), т. е. значения  $x$ , при подстановке которых в уравнение получается истинное (верное) равенство. Другими словами, решить уравнение — значит найти *нули* (или *корни*) функции  $f(x)$ , т. е. значения аргумента  $x$ , при которых график функции пересекает ось  $x$ . Говорят, что корни уравнения *удовлетворяют* этому уравнению. Если корней уравнения несколько,

их обычно нумеруют:  $x_1, x_2, x_3$  и т. д. Например, уравнение  $x^2 - 5x + 6$  имеет корни  $x_1 = 2, x_2 = 3$ ; уравнение  $10^x = 0$  корней не имеет.

Если уравнение не удастся решить точно, то можно искать *приближенные решения* (§ 10.4).

2°. Если в точке  $x_0$  сама функция  $f(x)$  и все ее производные (§ 5.4) до порядка  $(n - 1)$  включительно равны нулю, а производная порядка  $n$  отлична от нуля:

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ но } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

то  $x_0$  называется нулем (или корнем) функции  $f(x)$  *кратности  $n$* . Например,  $x = 0$  — нуль кратности 2 функции  $y = \sin^2 x$ , так как  $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$ . Корень  $x_0$  уравнения (3.1) имеет *кратность  $n$* , если  $x_0$  — нуль функции  $f(x)$  кратности  $n$ .

3°. Два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x)$$

называются *равносильными* (эквивалентными), если все корни первого уравнения являются корнями второго, а все корни второго уравнения — корнями первого. Другими словами, множества корней равносильных уравнений совпадают. Например, уравнения  $3x - 6 = 0$  и  $x = 2$  равносильны (один корень  $x = 2$ ); уравнения  $x^2 = 4$  и  $x = 2$  не равносильны (корни первого уравнения  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -2$ , корень второго уравнения один,  $x = 2$ ). Равносильные уравнения обозначают символом  $\Leftrightarrow$ ; например,

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0.$$

*Равносильные преобразования* уравнения — преобразования, приводящие к равносильному уравнению:

1) прибавление одновременно к обеим частям уравнения любого числа (в частности, перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с изменением знака);

2) умножение (и деление) обеих частей уравнения одновременно на любое число, отличное от нуля (в частности, на  $-1$ );

для уравнений в области действительных чисел, кроме того:

3) возведение обеих частей уравнения в любую нечетную натуральную степень (например, в третью);

4) возведение обеих частей уравнения в любую четную натуральную степень (например, в квадрат), если обе части уравнения неотрицательны.

4°. Если все корни уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$  удовлетворяют уравнению  $f_2(x) = g_2(x)$ , то говорят, что уравнение  $f_2(x) = g_2(x)$  есть *следствие* уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$ , и пишут

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Например,  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$  (однако утверждение  $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$  ошибочно!).

Важный пример неравносильного преобразования — возведение обеих частей уравнения вида  $f(x) = g(x)$  в четную степень:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^{2m}(x) = g^{2m}(x).$$

Возведение обеих частей уравнения в четную степень, вообще говоря, приводит к появлению *посторонних корней* (посторонние корни — это корни уравнения  $f(x) = -g(x)$ ). Например, уравнение  $x^2 = -1$ , не имеющее действительных корней, после возведения в квадрат превращается в уравнение  $x^4 = 1$ , имеющее два действительных корня  $x = \pm 1$ ; это посторонние корни для исходного уравнения.

### 3.2. Линейное, квадратное и биквадратное уравнения

1°. *Линейное уравнение*:  $ax + b = 0$ , где  $a$  и  $b$  — заданные действительные или комплексные числа, называемые *коэффициентами*. При любом  $a \neq 0$  линейное уравнение имеет единственное решение  $x = -b/a$ . При  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  решений нет.

2°. *Квадратное уравнение*:  $ax^2 + bx + c = 0$ ; здесь  $a, b, c$  — коэффициенты (действительные или комплексные). Если  $a = 0$ , квадратное уравнение вырождается в линейное уравнение; при  $a \neq 0$  делением обеих частей на  $a$  квадратное уравнение приводится к виду  $x^2 + px + q = 0$  (*приведенное квадратное уравнение*). Далее предполагается, что  $a \neq 0$ .

Квадратное уравнение всегда имеет корни (действительные или комплексные), при действительных  $a, b, c$  вычисляемые следующим образом. Вычисляем *дискриминант*  $D = b^2 - 4ac$ :

1) если  $D = 0$ , корень один (двукратный, см. § 3.1):

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad (3.2)$$

2) если  $D > 0$ , имеются два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad (3.3)$$

3) если  $D < 0$ , нет действительных корней, имеются два комплексных корня:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}, \quad (3.4)$$

где  $i$  — мнимая единица (п. 7.1.1°); в этом случае корни комплексно сопряженные,  $x_2 = -x_1$ .

Если коэффициенты  $a, b, c$  — комплексные числа, то формулы (3.2) — (3.4) сохраняют смысл; при этом символ  $\sqrt{z}$  означает какое-нибудь (например, главное, см. п. 7.3.7°) значение корня.

Для приведенного квадратного уравнения формула (3.3) имеет вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

что особенно удобно в случае четного коэффициента  $p$ . Например, для уравнения  $x^2 - 12x - 347 = 0$  корни

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 + 347} = 6 \pm \sqrt{383}.$$



Свойство корней приведенного квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  (*теорема Виета*):

$$x_1 \cdot x_2 = q, \quad x_1 + x_2 = -p,$$

т. е. произведение корней равно свободному члену, а сумма корней равна коэффициенту при  $x$ , взятому с противоположным знаком. Теорема Виета позволяет производить быструю проверку корней, а иногда и угадывать корни квадратного уравнения. Так, корни  $x_1 = 50$ ,  $x_2 = 7$  уравнения  $x^2 - 57x + 350 = 0$  видны из разложений  $350 = 50 \cdot 7$ ,  $57 = 50 + 7$ .

3°. Биквадратное уравнение  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  заменой  $t = x^2$  сводится к квадратному уравнению  $at^2 + bt + c = 0$ . В случае действительных коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  при  $D = b^2 - 4ac < 0$  действительных корней нет; при  $D > 0$  получаются два действительных значения  $t$ :  $t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$ ; при  $D = 0$  — одно действительное значение  $t$ :  $t_1 = -b / (2a)$ . Корни биквадратного уравнения действительны или комплексны в зависимости от знаков  $t_1$  и  $t_2$ .

В комплексной плоскости ( $x \in \mathbb{C}$ ) корни биквадратного уравнения (в том числе с комплексными коэффициентами) всегда существуют.

### 3.3. Многочлены

1°. Многочленом (*полиномом*) степени  $n$  от переменной  $x$  называется функция вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Здесь  $a_0 \neq 0$ ,  $n$  — целое число ( $n \geq 0$ ). Числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (действительные или комплексные) называются *коэффициентами многочлена*. Многочлен нулевой степени ( $n = 0$ ) совпадает с постоянной. Многочлены рассматривают на действительной оси ( $x \in \mathbb{R}$ ) или в комплексной плоскости ( $x \in \mathbb{C}$ ).

2°. Многочлены на действительной оси: переменная  $x$  и коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — действительные числа. Область определения — вся действительная ось.

Область значений при  $n$  нечетном — вся ось  $\mathbb{R}$ ; при  $n$  четном: если  $a_0 < 0$ , то полупрямая  $(-\infty, M]$ , где  $M$  — наибольшее значение  $P(x)$ ; если  $a_0 > 0$ , то полупрямая  $[m, +\infty)$ , где  $m$  — наименьшее значение  $P(x)$ ; при  $n = 0$  область значений состоит из одной точки  $a_0$ . Многочлен степени выше нулевой — функция непериодическая, неограниченная и, вообще говоря, немонотонная. Графики некоторых многочленов представлены на рис. 3.1.

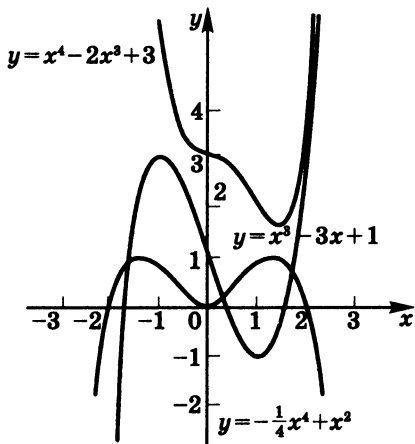


Рис. 3.1.

Графики некоторых многочленов

Многочлены в комплексной плоскости: область определения — вся комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ ; область значений при  $n > 0$  — вся комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ .

3°. Вычисление значения многочлена в заданной точке  $x$  удобно производить по *схеме Горнера*: вычисляют последовательно числа

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = p_0x + a_1, \quad \dots, \quad p_n = p_{n-1}x + a_n,$$

тогда  $P(x) = p_n$ . Этот способ обычно применяют при работе с ЭВМ.

#### 4°. Алгебра многочленов

##### 1) Два многочлена

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m,$$

$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$$

называют *равными*, если они тождественно совпадают: при всех  $x \in \mathbb{R}$  (или  $x \in \mathbb{C}$ )  $P(x) = Q(x)$ . У равных многочленов равны степени и все соответствующие коэффициенты. Два различных многочлена могут принимать равные значе-

ния в отдельных точках; например, многочлены  $P(x) = x^2$  и  $Q(x) = -x^2 + 2x$  совпадают при  $x = 0$  и  $x = 1$ .

**Теорема:** если два многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  степени не более  $n$  совпадают в каких-либо  $(n + 1)$  различных точках  $x_1, x_2, \dots, x_n + 1$ , т. е.  $P(x_k) = Q(x_k)$  для  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , то эти многочлены равны (тождественно совпадают).

2) При сложении двух многочленов степень суммы равна наибольшей из степеней слагаемых, кроме случая двух многочленов равной степени  $n$ , у которых  $a_0 = -b_0$  (в этом случае степень суммы меньше  $n$ ).

3) Произведение двух многочленов есть многочлен, степень которого равна сумме степеней данных многочленов. Коэффициенты произведения получаются при соответствующих степенях  $x$  после раскрытия скобок и приведения подобных членов; например,

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8.$$

4) *Дробно-рациональной* функцией (рациональной дробью) называется дробное выражение вида  $R(x) = P(x)/Q(x)$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь  $P(x)/Q(x)$  называется *правильной*. Если степень числителя  $m$  больше или равна степени знаменателя  $n$ , то дробь  $P(x)/Q(x)$  может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \frac{q(x)}{Q(x)}, \quad (3.5)$$

где  $p(x)$  — многочлен степени  $(m - n)$ , называемый *целой частью* (или частным);  $q(x)$  — многочлен степени не выше  $(n - 1)$ , называемый *остатком*, например,

$$(2x^2 + 1)/(x - 1) = 2x + 2 + 3/(x - 1).$$

Формулу (3.5) можно переписать в виде

$$P(x) = p(x)Q(x) + q(x).$$

Если остаток  $q(x)$  равен нулю, то говорят, что многочлен  $P(x)$  делится нацело на многочлен  $Q(x)$ ; например,

$$(x^3 + 8)/(x^2 - 2x + 4) = x + 2.$$

*Теорема Безу:* остаток при делении многочлена  $P(x)$  на разность  $(x - b)$  равен  $P(b)$ , т. е. равен значению многочлена в точке  $b$ .

*Следствие:* если  $P(b) = 0$ , т. е. число  $b$  — корень многочлена, то многочлен нацело делится на  $(x - b)$ . Другими словами, в этом случае многочлен  $P(x)$  можно представить в виде разложения на множители:

$$P(x) = (x - b)p(x),$$

причем если степень  $P(x)$  равна  $n$ , то степень  $p(x)$  равна  $(n - 1)$ .

Практически деление многочленов  $P(x)/Q(x)$  выполняют «уголком». Предварительно надо расположить оба многочлена по убывающим степеням  $x$  и записать их рядом, отделив «уголком»:

$$2x^3 + 3x^2 + x - 1 \left| x^2 + 2 \right.$$

Сначала делим старший член делимого на старший член делителя, здесь  $2x^3/x^3 = 2x$ , и записываем результат под горизонтальной чертой:

$$2x^3 + 3x^2 + x - 1 \left| x^2 + 2 \right. \\ \underline{2x} \phantom{+ 2}$$

Затем под делимым подписываем произведение делителя на указанный результат и вычитаем это произведение из делимого:

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + x - 1 \left| x^2 + 2 \right. \\ - 2x^3 \phantom{+ 3x^2} + 4x \phantom{- 1} \phantom{+ 2} \\ \hline 3x^2 - 3x - 1 \phantom{+ 2} \end{array}$$

Теперь задача свелась к делению нового многочлена меньшей степени (здесь  $3x^2 - 3x - 1$ ) на прежний делитель. Дальнейшие действия аналогичны описанным. В данном примере получается схема

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 3x^2 + x - 1 & x^2 + 2 \\
 \underline{2x^3} & \\
 3x^2 - 3x - 1 & \\
 \underline{-3x^2} & \\
 -3x - 7 &
 \end{array}$$

Дальнейшее деление невозможно;  $2x + 3$  есть целая часть (частное),  $-3x - 7$  есть остаток.

5°. Любой многочлен степени  $n > 0$  может быть разложен на  $n$  линейных множителей:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (3.6)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни многочлена, вообще говоря комплексные. Например,

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x - 1)(x - 2)(x + 1), \\
 x^3 + 8 &= (x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3}),
 \end{aligned}$$

где  $i = \sqrt{-1}$  (§ 7.1). Среди чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  могут оказаться одинаковые; тогда разложение (3.6) можно записать в виде

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_l)^{n_l}. \quad (3.7)$$

Здесь все числа  $x_1, x_2, \dots, x_l$  различные; показатели  $n_1, n_2, \dots, n_l$  являются кратностями (§ 3.1) соответствующих корней;  $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ . Например,

$$x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3(x - i)^2(x + i)^2,$$

где  $x_1 = 1$  — корень кратности 3,  $x_2 = i$  и  $x_3 = -i$  — корни кратности 2.

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряженные (§ 7.1), поэтому многочлен с действительными коэффициентами может быть разложен на действительные множители:

$$P(x) = a_0(x-x_1)^{n_1} \dots (x-x_r)^{n_r} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_kx+q_k)^{m_k},$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_r$  — различные действительные корни, а каждый квадратный трехчлен  $x^2 + p_jx + q_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) имеет по два сопряженных корня (п. 3.2.2°):

$$z_{1,2} = -p_j/2 \pm i\sqrt{q_j - (p_j/2)^2}$$

(каждый корень кратности  $m_j$ ). При этом выполняется соотношение

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r + 2(m_1 + m_2 + \dots + m_k) = n.$$

Например,  $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ ; здесь  $n_1 = 1$ ,  $m_1 = 1$ .

### 3.4. Алгебраические уравнения

#### 1°. Уравнение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (3.8)$$

где  $a_0 \neq 0$ , называется *алгебраическим уравнением степени  $n$* . Его корни — это корни соответствующего многочлена  $P(x)$ , стоящего в левой части уравнения. Линейное, квадратное и биквадратное уравнения являются примерами алгебраических уравнений.

*Основная теорема алгебры:* любое алгебраическое уравнение степени  $n > 0$  имеет по крайней мере один корень (возможно, комплексный). Из этой теоремы и теоремы Безу (п. 3.3.4°) вытекает утверждение: любое алгебраическое уравнение степени  $n > 0$  имеет в комплексной плоскости ровно  $n$  корней (каждый корень кратности  $m$  учитывается  $m$  раз). Так, уравнение  $x^2 = 0$  имеет один двукратный корень  $x_0 = 0$  или два совпадающих корня  $x_1 = x_2 = 0$ .

Задача вычисления корней алгебраических уравнений имеет важное практическое значение в теоретической и прикладной математике, физике и технике.

2°. Для уравнения степени 1, 2, 3, 4 существуют формулы, выражающие корни уравнения «в радикалах», т. е. с помощью дробных степеней некоторых комбинаций коэффициентов. Для линейного и квадратного уравнений такие формулы приведены в § 3.2; для уравнения третьей степени (кубического уравнения) известны *формулы Кардано*; для общего уравнения четвертой степени также существуют довольно сложные формулы.

Доказано, что ни для какого  $n \geq 5$  не могут существовать формулы, выражающие корни произвольного уравнения степени  $n$  через его коэффициенты с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую или дробную степень (теорема Абеля).

3°. Если удастся разложить многочлен  $P(x)$  на множители, задача решения уравнения упрощается. Например,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6);$$

следовательно,  $x_1 = 1$ , остальные корни находятся из квадратного уравнения  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

В общем случае, если удалось каким-либо способом, например подбором, найти один корень  $x_1$  алгебраического уравнения, то делением многочлена  $P(x)$  на разность  $(x - x_1)$  (п. 3.3.4°) задача сводится к решению уравнения степени  $(n - 1)$ . Этот прием называется *понижением степени*. Например, число  $x_1 = 2$  удовлетворяет уравнению

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0,$$

поэтому делением левой части на  $(x - 2)$  получаем уравнение третьей степени для прочих корней:

$$x^3 - 4x + 3 = 0.$$

В свою очередь,  $x_2 = 1$  есть очевидный корень этого уравнения, и т. д.

4°. Двучленные алгебраические уравнения имеют вид  $ax^n + b = 0$ . Они решаются в явном виде:  $x^n = c$ , где  $c = -b/a$ . Если  $b \neq 0$ , то в комплексной плоскости имеется  $n$  различных корней:

$$x_k = |c|^{1/n} \exp [i(\varphi + 2\pi k)/n], \quad \varphi = \arg c,$$

где  $k = 0, 1, \dots, n-1$  (п. 7.3.7°); если  $b = 0$ , то корень один:  $x = 0$ . Если  $n$  нечетно, то при любом действительном  $c$  имеется один действительный корень  $x_0 = \sqrt[n]{c}$ . Если  $n$  четно и при этом  $c > 0$ , то действительных корней два:  $x_1 = \sqrt[n]{c}$  и  $x_2 = -\sqrt[n]{c}$ , если же  $c < 0$ , то действительных корней нет.

5°. К алгебраическим уравнениям сводятся *дробно-рациональные уравнения* вида  $P(x)/Q(x) = 0$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. Здесь допустимые значения  $x$  — вся действительная ось (или комплексная плоскость), за исключением корней знаменателя. В области допустимых значений (ОДЗ) уравнение равносильно алгебраическому уравнению  $P(x) = 0$ .

### 3.5. Иррациональные уравнения.

#### Уравнения с модулями

1°. *Иррациональные уравнения* содержат выражения вида  $\sqrt[n]{P(x)}$ , где  $P(x)$  — некоторый многочлен (например, уравнение  $x = \sqrt{2x^2 - 1}$ ). Иррациональные уравнения обычно рассматривают при действительных значениях переменной  $x$ . Область допустимых значений — множество таких  $x \in \mathbb{R}$ , при которых определены все входящие в уравнение функции. В данном примере ОДЗ представляет собой объединение двух лучей:

$$(-\infty, -1/\sqrt{2}] \cup [1/\sqrt{2}, +\infty).$$

2°. В некоторых случаях иррациональные уравнения удается привести к алгебраическим уравнениям. Рассмотрим простейшие виды таких уравнений.



## 1) Уравнение

$$\sqrt[m]{P(x)} = Q(x), \quad (3.9)$$

где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. При нечетном  $m$  ОДЗ — вся действительная ось  $\mathbb{R}$ , при четном — множество  $x$  таких, что  $P(x) \geq 0$  (п. 3.7.5°). Возводя обе части уравнения (3.9) в степень  $m$ , получаем алгебраическое уравнение

$$P(x) = Q^m(x). \quad (3.10)$$

Если  $m$  нечетное, то уравнение (3.10) равносильно уравнению (3.9). Если  $m$  четное, то (3.10) есть следствие (3.9): вместе с корнями уравнения (3.9) уравнению (3.10) удовлетворяют также посторонние корни — корни уравнения  $\sqrt[m]{P(x)} = -Q(x)$ .

При четном  $m$ , найдя все корни (3.10), следует произвести проверку каждого корня подстановкой в (3.9). Можно поступить проще: пусть данный корень  $x_0$  уравнения (3.10) принадлежит ОДЗ исходного уравнения; тогда достаточно найти знак  $Q(x_0)$ : если  $Q(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — посторонний корень; если  $Q(x_0) \geq 0$ , то  $x_0$  — корень исходного уравнения.

## Пример

$\sqrt{2x^2 - 1} = x \Rightarrow 2x^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$ . Корни  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ; оба корня лежат в ОДЗ; корень  $x_2$  посторонний, так как  $Q(x_2) = x_0 < 0$ . Ответ:  $x = 1$ .

2) Уравнение  $\sqrt[m]{P(x)} = \sqrt[n]{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. Возведением в степень  $m \cdot n$  данное уравнение приводится к алгебраическому уравнению

$$P^n(x) = Q^m(x).$$

Исследование ОДЗ и посторонних корней аналогично описанному выше.

3) Уравнение  $P(x, \sqrt[n]{ax+b}) = 0$  (в частности,  $P(x, \sqrt[n]{x}) = 0$ ). Здесь  $P(x, y)$  — многочлен от двух переменных  $x$  и  $y$ , т. е. функция вида

$$P(x, y) = a_0 x^{l_0} y^{k_0} + a_1 x^{l_1} y^{k_1} + \dots + a_n x^{l_n} y^{k_n}.$$

Для уравнения  $P(x, \sqrt[m]{ax+b}) = 0$  ОДЗ — вся ось  $\mathbb{R}$  или полуось (в зависимости от четности  $m$ ). Подстановка  $t = \sqrt[m]{ax+b}$  приводит уравнение к алгебраическому:

$$P\left(\frac{t^m - b}{a}, t\right) = 0.$$

**Пример**

$x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ . Подстановка  $t = \sqrt{x}$  ( $t \geq 0$ ) дает

$$t^3 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 1) = 0.$$

Корни  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$ ,  $t_3 = (-1 - \sqrt{5})/2$  (посторонний корень, так как  $t_3 < 0$ ).

Ответ:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = [(\sqrt{5} - 1)/2]^2 = (3 - \sqrt{5})/2$ .

4) Уравнение  $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} + R(x)$ , где  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  — многочлены. ОДЗ — общая часть областей определения функций  $\sqrt{P(x)}$  и  $\sqrt{Q(x)}$ , т. е.

$$\{x | P(x) \geq 0\} \cap \{x | Q(x) \geq 0\}.$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{P(x)} &= \sqrt{Q(x)} + R(x) \Rightarrow P(x) = Q(x) + 2R(x)\sqrt{Q(x)} + R^2(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2R(x)\sqrt{Q(x)} = P(x) - Q(x) - R^2(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4R^2(x)Q(x) = (P(x) - Q(x) - R^2(x))^2. \end{aligned}$$

При этих преобразованиях дважды могли появиться посторонние корни. Отметим, однако, что если, например,  $R(x) \geq 0$  при всех  $x \in$  ОДЗ, то первое возведение в квадрат есть равносильное преобразование (в ОДЗ).

**Пример**

$\sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-1}$ . ОДЗ:  $x \in [0,5; +\infty)$ . Возведение в квадрат дает лишь следствие, а не равносильное уравнение. Здесь лучше переписать уравнение в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{3x} &= \sqrt{2x-1} + 1 \Leftrightarrow 3x = 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0. \end{aligned}$$

Оба корня  $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$  лежат в ОДЗ.

**3°. Уравнения с модулями** (абсолютными величинами) содержат выражения вида  $|\varphi(x)|$ ; обычно эти уравнения рассматривают в области действительных чисел. Найдя интервалы постоянства знака функций, стоящих под знаком модуля, на каждом таком интервале уравнение записывают без знака модуля (*метод интервалов*). Таким образом, уравнение с модулями сводится к совокупности обычных уравнений на соответствующих интервалах, а множество решений уравнения является объединением соответствующих множеств.

### Пример

$|x - 1| = 2x + |x - 2|$ . Функции  $\varphi_1 = x - 1$  и  $\varphi_2 = x - 2$  меняют знак в своих корнях:  $\varphi_1$  — в точке  $x_1 = 1$ ,  $\varphi_2$  — в точке  $x_2 = 2$ . Возникают три интервала на оси  $x$  (рис. 3.2):

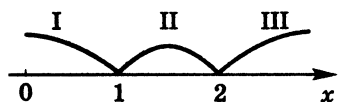


Рис. 3.2.  
Уравнение  $|x - 1| = 2x + |x - 2|$   
рассматривается на каждом  
из трех интервалов

- I)  $1 - x = 2x + 2 - x$ , или  $x = -1/2$ ,  $x \in I$ ;  
 II)  $x - 1 = 2x + 2 - x$ , нет корней при  $x \in II$ ;  
 III)  $x - 1 = 2x + x - 2$ , или  $x = 1/2$ ,  $x \notin III$ .

Ответ:  $x = -1/2$ .

## 3.6. Системы уравнений

**1°. Система двух линейных уравнений** с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Здесь коэффициенты  $a_1, a_2, b_1, b_2$  и правые части  $c_1, c_2$  — заданные числа (действительные или комплексные). Решить систему — значит найти все ее *решения*, т. е. пары чисел  $(x, y)$ , при подстановке которых в оба уравнения получаются верные

равенства. Например, система  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$  имеет единственное решение:  $x = 2$ ,  $y = 1$ , т. е. одну пару чисел  $(2, 1)$ ; система  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$  не имеет решений; система  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$  имеет бесчисленное множество решений: любая пара чисел вида  $(\alpha, 3 - \alpha)$ , где  $\alpha$  произвольно, удовлетворяет обоим уравнениям.

Уравнения, составляющие систему (3.11), имеют простой геометрический смысл: каждое уравнение задает некоторую прямую линию на плоскости  $xy$  (п. 9.1.1°). Решение системы (3.11) — это координаты точки пересечения прямых. Таким образом, решение единственно, если прямые пересекаются; решений нет, если прямые параллельны; решений бесконечно много, если прямые совпадают.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если все решения одной системы являются решениями другой системы, и наоборот, все решения второй системы удовлетворяют первой системе. Перестановка уравнений местами, умножение обеих частей какого-либо уравнения на ненулевое число, прибавление к какому-либо уравнению другого уравнения, умноженного на число, — это равносильные преобразования системы: при таких преобразованиях система преобразуется в равносильную.

Для решения системы (3.11) составим *определитель* системы  $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$ . Если  $\Delta \neq 0$ , то решение существует и единственно, причем имеют место *формулы Крамера*

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta,$$

где

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1, \quad \Delta_y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Если  $\Delta = 0$ , то решений либо нет, либо бесконечно много.

На практике обычно удобнее решать системы *методом подстановки*: одно из уравнений «решаем» относительно  $x$  или  $y$  (например,  $y = (c_1 - a_1x)/b_1$ ) и подставляем это выражение

в другое уравнение; тогда получится линейное уравнение для одного неизвестного (в данном случае для  $x$ ).

Пример

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases} \cdot \text{Из первого уравнения имеем } x = 2 - 1,5y;$$

подставляя  $x$  во второе уравнение, получаем

$$5(2 - 1,5y) - 2y = 3, \text{ или } 9,5y = 7, y = 14/19.$$

Теперь  $x$  находится по формуле подстановки:

$$x = 2 - 1,5 \cdot 14/19 = 17/19.$$

В результате подстановки  $y = (c_1 - a_1x)/b_1$  может получиться уравнение вида  $0 \cdot x = \gamma$ . Если  $\gamma \neq 0$ , то система решений не имеет; если  $\gamma = 0$ , то  $x$  произвольно, решений бесконечно много,  $y$  выражается через  $x$  по формуле подстановки.

*Метод исключения (метод Гаусса)*, по существу, не отличается от метода подстановки: умножая первое уравнение на  $b_2$ , второе — на  $b_1$  и вычитая второе уравнение из первого, получаем линейное уравнение для одного неизвестного  $x$ . Для нахождения  $y$  можно поступить аналогично (умножить уравнения на  $a_2$  и  $a_1$ ) либо выразить  $y$  через уже известное  $x$  с помощью первого или второго уравнения (3.11).

**2°. Система трех линейных уравнений** с тремя неизвестными  $x, y, z$  имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (3.12)$$

Геометрический смысл системы: каждое уравнение задает некоторую плоскость в пространстве (п. 9.4.7°). Линия пересечения двух плоскостей есть прямая линия. Если эта прямая не параллельна третьей плоскости, то общая точка трех плоскостей единственна и система имеет единственное решение — тройку координат  $x, y, z$  (п. 8.1.2°) точки пересечения. Если среди плоскостей есть параллельные либо линия пересечения двух плоскостей параллельна третьей плоскости, то система

не имеет решений. Возможен также случай существования бесконечного множества решений (например, все три плоскости пересекаются по некоторой прямой).

Будем считать, что система (3.12) имеет единственное решение. Его можно найти методом подстановки или методом исключения. В методе подстановки выражают, например,  $x$  через  $y$  и  $z$  из первого уравнения:  $x = (d_1 - b_1y - c_1z)/a_1$ , и подставляют это выражение во второе и третье уравнения на место  $x$ . Получается система двух уравнений с двумя неизвестными  $y$  и  $z$ , ее решают, как описано в п. 1°.

В методе исключения делят первое уравнение на  $a_1$  (если  $a_1 \neq 0$ ), получают

$$x + b'_1y + c'_1z + d'_1,$$

где

$$b'_1 = b_1/a_1, \quad c'_1 = c_1/a_1, \quad d'_1 = d_1/a_1.$$

Затем, умножая это уравнение на  $a_2$ , вычитают его из второго уравнения, а умножая на  $a_3$ , вычитают из третьего уравнения (при этом «пропадает»  $x$ ). Система приобретает вид

$$\begin{cases} x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ b'_2y + c'_2z = d'_2. \\ b'_3y + c'_3z = d'_3 \end{cases}$$

К последним двум уравнениям можно применить такую же процедуру и получить уравнение для  $z$  вида  $\alpha z = \gamma$ . Отсюда находят  $z$ , подставляют его во второе и первое уравнения, далее находят  $y$ , а затем  $x$ . В случаях невозможности деления (обращения в нуль соответствующего коэффициента) уравнения следует поменять местами.

Если в процессе исключения неизвестных встретится равенство вида

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \gamma, \text{ где } \gamma \neq 0,$$

то это означает, что система не имеет решений. Если система имеет бесконечное множество решений, то в процессе исключения одно из уравнений приобретет вид

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0.$$

3°. В общем случае система двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  имеет вид

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}, \quad (3.13)$$

где  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  — заданные функции двух переменных. Здесь ОДЗ — множество пар  $(x, y)$  (точек на плоскости), для которых определены обе функции  $f$  и  $g$ . Решениями системы (3.13) называют пары чисел  $(x, y)$ , при подстановке которых в оба уравнения (3.13) получаются верные равенства. Например, *нелинейная система*  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$  имеет два решения:  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$ .

К некоторым системам удастся применить метод подстановки: если, например, первое из уравнений (3.13) можно решить относительно  $y$ , т. е. найти  $y$  как функцию  $y = \varphi(x)$ , то подстановка  $\varphi(x)$  во второе уравнение на место  $y$  дает для  $x$  уравнение  $g(x, \varphi(x)) = 0$ .

Пример

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}. \text{ Из первого уравнения находим } y = 3 - x, \text{ под-}$$

ставляем во второе:  $x(3 - x) = 2$ , или  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ; тогда  $y_1 = 3 - 1 = 2$ ,  $y_2 = 3 - 2 = 1$ .

Может найтись не одна, а несколько функций вида  $\varphi(x)$ ; тогда получится столько же уравнений вида  $g(x, \varphi(x)) = 0$ .

Пример

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases}. \text{ Из первого уравнения находим } y = \sqrt{4 - x^2}$$

или  $y = -\sqrt{4 - x^2}$ . Это дает два иррациональных уравнения:  $x\sqrt{4 - x^2} = 1$  и  $x\sqrt{4 - x^2} = -1$ ; оба надо решить. В данном примере, однако, выгодно поступить иначе: из второго уравнения  $y$  однозначно выражается в виде  $y = 1/x$ , и подстановка  $y$  в первое уравнение дает  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$ , или  $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$  — биквадратное уравнение (п. 3.2.3°).

В некоторых случаях полезно заменить систему более простой *равносильной* системой. Преобразования, приводящие к равносильным системам, — равносильные преобразования каждого уравнения (§ 3.1), а также перестановка уравнений и прибавление к какому-либо уравнению другого уравнения, умноженного на какое-либо число.

**Пример**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 6 \end{cases} \quad (\text{из первого уравне-}$$

ния вычли удвоенное второе, к первому уравнению прибавили удвоенное второе). Очевидно,

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 2 \\ (x + y)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - y| = \sqrt{2} \\ |x + y| = \sqrt{6} \end{cases};$$

получаем совокупность четырех линейных систем:

$$\begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ x + y = \sqrt{6} \end{cases}; \begin{cases} x - y = -\sqrt{2} \\ x + y = \sqrt{6} \end{cases}; \begin{cases} x - y = -\sqrt{2} \\ x + y = -\sqrt{6} \end{cases}; \begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ x + y = -\sqrt{6} \end{cases}.$$

В результате имеем четыре решения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

### 3.7. Неравенства

1°. *Неравенствами* называются соотношения вида

$$A < B, \quad A > B, \quad A \leq B, \quad A \geq B, \quad A \neq B$$

(читается « $A$  меньше  $B$ ,  $A$  больше  $B$ ,  $A$  меньше или равно  $B$ ,  $A$  больше или равно  $B$ ,  $A$  не равно  $B$ »). Здесь  $A$  и  $B$  — действительные числа или функции, принимающие действительные значения. Неравенство состоит из левой части и правой части, соединенных знаком неравенства. В случае знаков  $>$  или  $<$



неравенство называют строгим, в случае знаков  $\geq$  или  $\leq$  — нестрогим.

Неравенство может быть *истинно* (верно, справедливо) или *ложно* (неверно, несправедливо). Например,  $7 \geq -2$  и  $1 - \sqrt{2} < 0$  — истинные неравенства;  $7 \leq -2$  — ложное неравенство;  $x^2 - 1 < 0$  истинно при  $x \in (-1, 1)$  и ложно при  $x \notin (-1, 1)$ ; неравенство  $x^2 + 1 > 0$  истинно при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Пусть имеются два неравенства. Если из истинности первого неравенства следует истинность второго, то второе неравенство называют *следствием* первого и используют символ  $\Rightarrow$ . Например,  $x > 1 \Rightarrow x \geq 0$ . Если второе неравенство есть следствие первого, а первое неравенство — следствие второго, то такие неравенства называют *равносильными* (эквивалентными). Например,  $2^a \leq 2^b \Leftrightarrow a \leq b$  при  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## 2°. Основные свойства неравенств:

1) к обеим частям неравенства можно прибавить одно и то же число:

$$A < B \Leftrightarrow A + \gamma < B + \gamma;$$

2) обе части неравенства можно умножить (или разделить) на одно и то же положительное число:

$$A < B \Leftrightarrow \gamma A < \gamma B, \text{ если } \gamma > 0;$$

3) обе части неравенства можно умножить (или разделить) на одно и то же отрицательное число (при этом необходимо изменить знак неравенства на противоположный):

$$A < B \Leftrightarrow \gamma A > \gamma B, \text{ если } \gamma < 0.$$

Нестрогие неравенства имеют аналогичные свойства.

*Система неравенств* (два или более неравенств) считается *выполненной* (истинной), если истинны все составляющие ее неравенства. Например, система  $\begin{cases} 7 > 2 \\ -3 \leq 1 \end{cases}$  выполнена; система  $\begin{cases} 7 > 2 \\ 3 \leq 1 \end{cases}$  не выполнена; система  $\begin{cases} 7 > 2 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$  выполнена только при  $x \in (1, +\infty)$ .

Два истинных неравенства, знаки которых одинаковы, можно почленно сложить — получим истинное неравенство:

$$\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A + C < B + D.$$

Два истинных неравенства, левые и правые части которых положительны, а знаки неравенств одинаковы, можно перемножить:

$$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow AC > BD.$$

Например,

$$\begin{cases} 7 > 2 \\ 4 > 3 \end{cases} \Rightarrow 28 > 6.$$

Неравенство, обе части которого положительны, можно возвести в любую натуральную степень (в том числе и четную):

$$A < B \Leftrightarrow A^m < B^m, \text{ если } A > 0 \text{ и } B > 0.$$

Любое неравенство можно возвести в нечетную натуральную степень:

$$A < B \Leftrightarrow A^{2n+1} < B^{2n+1}.$$

*Двойные неравенства:*

$$A < B < C, \quad A < B \leq C \quad \text{и т. д.}$$

Такие записи означают систему соответствующих неравенств:

$$\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}, \quad \begin{cases} A < B \\ B \leq C \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

**3°. В связи с неравенствами рассматриваются два типа задач:**

1) доказать истинность (или ложность) какого-либо неравенства;

2) решить неравенство, т. е. найти все значения переменных, входящих в неравенство, при которых неравенство истинно.

Примеры таких задач:

1) доказать, что  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  при любых  $a > 0$ ;

2) решить неравенство  $\sqrt{3x-1} \leq x$ .

Некоторые полезные неравенства:

1)  $|a+b| \leq |a|+|b|$ ,  $|a-b| \geq ||a|-|b||$  — неравенства треугольника;

2)  $a + a^{-1} \geq 2$  для  $a \in (0, +\infty)$ ;

3)  $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$ ;

4)  $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$  для  $a, b \in [0, +\infty)$ , т. е. среднее геометрическое двух чисел не больше их среднего арифметического;

5)  $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq$   
 $\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

— неравенство Коши — Буняковского; в частности,

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2),$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2);$$

6)  $|\sin x| \leq |x|$  для  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \sin x < x$  для  $x \in (0, \pi)$ ,  
 $\sin x > (2/\pi)x$  для  $x \in (0, \pi/2)$ ;

7)  $\operatorname{tg} x > x$  для  $x \in (0, \pi/2)$ .

(В неравенствах 6) и 7) угол  $x$  в радианах!)

4°. Решение неравенств вида  $f(x) < g(x)$  или  $f(x) \leq g(x)$  следует начинать с нахождения ОДЗ — области допустимых значений переменной  $x$ , т. е. множества, на котором определены все входящие в неравенство функции. С помощью равносильных преобразований (п. 1°) иногда удается упростить неравенства и решить их. Обычно решение неравенства имеет вид одного или объединения нескольких промежутков.

5°. *Алгебраические неравенства.*

1)  $P(x) > 0$  или  $P(x) < 0$ , где  $P(x)$  — многочлен. Если известно разложение  $P(x)$  на действительные множители (п. 3.3.5°):

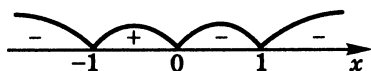
$$P(x) = a_0(x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_r)^{m_r} (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \dots (x^2+p_kx+q_k)^{n_k},$$

то промежутки, на которых  $P(x) > 0$ , легко найти, пользуясь *методом интервалов*. Согласно методу интервалов, следует нанести на числовую ось точки  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , т. е. действительные корни многочлена  $P(x)$ . Эти точки разбивают числовую ось на интервалы, на каждом из которых знак  $P(x)$  сохраняется. При переходе от одного интервала к другому через какую-либо из этих точек (например, через  $x_1$ ) знак  $P(x)$  меняется, если  $m_1$  нечетно, и сохраняется, если  $m_1$  четно. Квадратичные множители всегда положительны. Теперь достаточно узнать знак  $P(x)$  внутри одного какого-либо интервала (обычно удобно взять  $x$  правее самого правого корня), чтобы расставить знаки  $P(x)$  на всех интервалах. Тем самым решение неравенства получено.

*Замечание.* Знак  $P(x)$  справа от самого правого корня совпадает со знаком  $a_0$ .

Рис. 3.3.

К решению методом  
интервалов неравенства  
 $-3(x+1)x^3(x-1)^2(x^2+x+1) > 0$



### Пример

Пусть  $P(x) = -3(x+1)x^3(x-1)^2(x^2+x+1)$ . На рис. 3.3 дугами показаны интервалы постоянства знака  $P(x)$ . Решением неравенства  $P(x) > 0$  является промежуток  $(-1, 0)$ ; решением неравенства  $P(x) < 0$  — объединение трех промежутков:  $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

2) Нестрогие неравенства  $P(x) \geq 0$  или  $P(x) \leq 0$  решаются так же, как и строгие, при этом концы промежутков включаются в ответ. Например, неравенство

$$(x - 0,5)(x - 2)^2(x - 4) \geq 0$$

имеет решение

$$(-\infty, 0,5] \cup \{2\} \cup [4, +\infty),$$

причем точка  $x = 2$  (конец интервала  $(2, 4)$ ) удовлетворяет неравенству.

3) Неравенство  $P(x) < Q(x)$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены, решается переносом  $Q(x)$  в левую часть.

4)  $P(x)/Q(x) < 0$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены. ОДЗ неравенства — вся действительная ось, за исключением корней знаменателя дроби. Умножением обеих частей неравенства на множитель  $Q^2(x)$  (положительный в ОДЗ) сводим данное неравенство к равносильному (в ОДЗ):  $P(x)Q(x) < 0$ .

$$5) \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} < \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \Leftrightarrow \frac{P_1(x)Q_2(x) - Q_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)} < 0.$$

6°. *Иррациональные неравенства* содержат выражения вида  $\sqrt[n]{P(x)}$ , где  $P(x)$  — многочлен. Основные приемы преобразования иррациональных неравенств к алгебраическим те же, что и для соответствующих уравнений (§ 3.5), но здесь есть и существенные отличия, связанные с возведением неравенства в четную степень. Например, при решении неравенства  $\sqrt{P(x)} < Q(x)$  необходимо предусмотреть два случая:

1)  $Q(x) \geq 0$ , при этом неравенство  $P(x) < Q^2(x)$  будет равносильно исходному (в ОДЗ);

2)  $Q(x) < 0$ , здесь нельзя возводить неравенство в квадрат (в данном случае неравенство не имеет решений).

Неравенство  $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$  в случае  $Q(x) \geq 0$  можно возводить в квадрат:  $P(x) \geq Q^2(x)$ , а при  $Q(x) < 0$  неравенство выполняется «автоматически», т. е. при любом  $x \in \text{ОДЗ}$ .

### Примеры

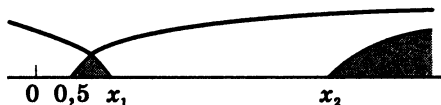
1)  $\sqrt{3x} \geq 1 + \sqrt{2x-1}$ ; ОДЗ:  $[0,5; +\infty)$ . Так как обе части неотрицательны, можно возвести их в квадрат:

$$\begin{aligned} 3x \geq 1 + 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} \leq x \Leftrightarrow 4(2x-1) \leq x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) \geq 0, \end{aligned}$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - 8x + 4 = 0$ ;  $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ . Полученное неравенство справедливо вне интервала  $(x_1, x_2)$ . Учитывая ОДЗ, получаем ответ (см. рис. 3.4):

$$x \in [0,5; 4 - 2\sqrt{3}] \cup [4 + 2\sqrt{3}; +\infty).$$

Рис. 3.4.  
К решению неравенства  
 $\sqrt{3x} \geq 1 + \sqrt{2x-1}$



Утверждение о том, что  $0,5 < x_1$ , доказывается следующим образом:

$$0,5 < 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 1 < 8 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow 48 < 49.$$

Так как преобразования равносильные, а последнее неравенство истинное, то истинно и первоначальное неравенство.

2)  $\sqrt{x^2 - 2x} > x - 4$ ; ОДЗ:  $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ .

а)  $x \geq 4$ . Возводим неравенство в квадрат:

$$x^2 - 2x > x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 3x > 8;$$

в этом случае  $x \in [4, +\infty)$ .

б)  $x < 4$ . Левая часть неравенства положительна, правая отрицательна; подходит любое  $x \in [2, 4)$  или  $x \in (-\infty, 0]$ .

Общий ответ:  $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ .

3)  $\sqrt{x^2 - 2x} < x - 4$ .

а)  $x \geq 4$ . Возводим неравенство в квадрат, получаем  $3x < 8$ , что при  $x \geq 4$  невозможно.

б)  $x < 4$ . Левая часть неотрицательна, правая отрицательна; решений нет.

Итак, данное неравенство решений не имеет.

**7°. Трансцендентные неравенства** содержат показательные, логарифмические и тригонометрические функции. В некоторых случаях такие неравенства удастся решить, используя свойства входящих в них функций.

### Примеры

1)  $a^x > b$ . При  $b \leq 0$   $x \in \mathbb{R}$ ; при  $b > 0$ ,  $a > 1$   $a \in (\log_a b, +\infty)$ ; при  $b > 0$ ,  $a < 1$   $x \in (-\infty, \log_a b)$ .

2)  $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 \geq 0$ . Обозначим  $2^x = t$  ( $t > 0$ ).

Данное неравенство принимает вид  $t^2 - 5t + 6 \geq 0$ , откуда  $t \in (0, 2] \cup [3, +\infty)$ ; следовательно

$$x \in (-\infty, 1] \cup [\log_2 3, +\infty).$$

3)  $-3 \log_{0,7}(x+1) < 6$ ; ОДЗ:  $x > -1$ . Делением на  $-3$  получаем равносильное неравенство:

$$\log_{0,7}(x+1) > -2 \Leftrightarrow \log_{0,7}(x+1) > \log_{0,7}(0,7)^{-2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+1 < (0,7)^2 \Leftrightarrow x < -1 + (0,7)^{-2}.$$

Ответ:  $-1 < x < 51/49$ .

8°. Неравенства, содержащие *модули*, как и аналогичные уравнения (п. 3.5.3°), следует рассматривать отдельно на каждом из интервалов постоянства знака выражений, стоящих под знаком модуля. В результате получается совокупность неравенств обычного вида на соответствующих интервалах, а множество решений неравенства является объединением соответствующих множеств.

Пример

$$|x+1| + |2x-1| > |x-1| - 3.$$

Переходные точки:  $-1$ ;  $0,5$ ;  $1$ . Соответственно имеется четыре интервала:

$$(-\infty; -1), \quad (-1; 0,5), \quad (0,5; 1), \quad (1; +\infty).$$

Например, при  $x \in (-1; 0,5)$  данное неравенство равносильно

$$x+1 - (2x-1) > 1 - x - 3 \text{ или } 1 > -3,$$

что верно независимо от  $x$ ; это значит, что весь интервал  $(-1; 0,5)$  удовлетворяет данному неравенству. Аналогично исследуются и другие интервалы.

## 4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрия возникла при изучении соотношений между сторонами и углами треугольников. Наряду с многочленами тригонометрические функции чаще других встречаются во всевозможных вычислениях.

В тригонометрии используют как градусную, так и радианную меру углов (п. 9.1.4°). Если не оговорено противоположное, будем считать угол  $\alpha$  измеренным в радианах, при этом  $\alpha$  является безразмерной величиной (§ Ф1.2),  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ .

### 4.1. Тригонометрические функции и их графики

1°. *Тригонометрические функции острого угла.* Простейший способ введения тригонометрических функций — с помощью прямоугольных треугольников (рис. 4.1).

Отношение длины стороны  $BC$  (катета) к длине стороны  $AB$  (гипотенузы) называется *синусом угла  $\alpha$* , *противолежащего катету  $BC$* :

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} \quad \text{или} \quad \sin \alpha = \frac{a}{c},$$

где длины сторон прямоугольного треугольника обозначены  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Отношение  $|AC|/|AB|$  называется *косинусом угла  $\alpha$* , *прилежащего к катету  $AC$* .

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

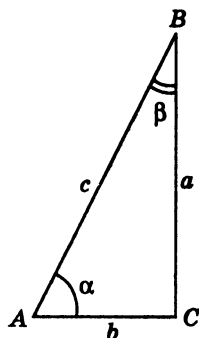


Рис. 4.1.

К определению тригонометрических функций с помощью прямоугольного треугольника

Отношение длин катетов  $|BC|$  к  $|AC|$  называется *тангенсом*, обратное отношение — *котангенсом* угла  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Очевидные формулы:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — острые углы прямоугольного треугольника ( $\alpha + \beta = \pi/2$ ).

Реже используют функции секанс и косеканс:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$



**2°. Тригонометрические функции произвольных значений аргумента.** Возьмем на плоскости луч  $OM_0$  и будем поворачивать его вокруг точки  $O$  против часовой стрелки (рис. 4.2, а). При повороте на угол  $\alpha$  луч  $OM_0$  отобразится на луч  $OM_\alpha$ ; точка  $M_0$ , пробежав часть окружности с центром в точке  $O$ , попадет в точку  $M_\alpha$ . Если угол поворота прямой ( $\alpha = \pi/2$ ), дуга  $M_0M_\alpha$  — четверть окружности; если угол поворота развернутый ( $\alpha = \pi$ ), дуга  $M_0M_\alpha$  — полуокружность; если угол поворота полный ( $\alpha = 2\pi$ ), дуга  $M_0M_\alpha$  — полная окружность, в этом случае  $M_\alpha = M_0$ .

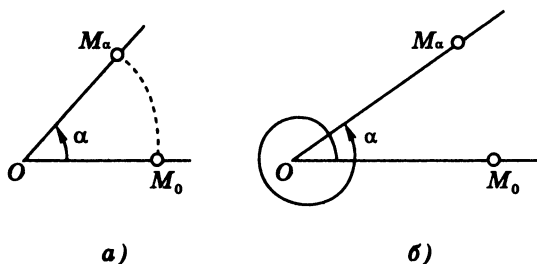


Рис. 4.2.

При повороте на угол  $\alpha$  луч  $OM_0$  отобразится на луч  $OM_\alpha$

Продолжая поворачивать луч против часовой стрелки, мы заставим точку  $M_0$  вновь пробегать окружность, при этом угол поворота  $\alpha$  будет больше полного. На рис. 4.2, б угол  $\alpha = 2\pi + \pi/6$ . Направление поворотов против часовой стрелки считается положительным ( $\alpha > 0$ ), направление по часовой стрелке — отрицательным ( $\alpha < 0$ ).

Рассмотрим прямоугольную систему координат  $xu$  на плоскости (п. 8.3.2°) и круг единичного радиуса, имеющий центр в начале координат (рис. 4.3). Такой круг называется *единичным кругом*. Точка  $M_\alpha$  на его окружности получается из точки  $M_0(1, 0)$  в результате поворота луча  $OM_0$  на угол  $\alpha$ . Отметим, что если два угла поворота  $\alpha$  и  $\beta$  отличаются на целое число полных оборотов, т. е. на  $360^\circ \cdot m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), то соответствующие точки  $M_\alpha$  и  $M_\beta$  совпадают.

Координаты точки  $M_\alpha$  обозначим  $x$  и  $y$ ; очевидно,

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (уравнение окружности).}$$

Тригонометрические функции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= y, & \cos \alpha &= x, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

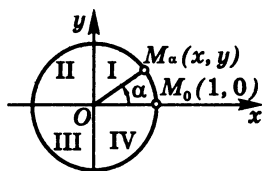
Для положительных острых углов эти определения совпадают с приведенными в п. 1°.

**Квадранты**, или четверти круга, нумеруются в положительном направлении от I до IV (рис. 4.3). Знаки тригонометрических функций в различных квадрантах даны в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Знаки тригонометрических функций

Квадрант	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Рис. 4.3.  
Единичный круг

**3°. Графики и свойства тригонометрических функций.** Здесь удобно обозначать, как обычно, аргумент  $x$ , а значение функции  $y$ .

1)  $y = \sin x$ . График — синусоида (сплошная линия на рис. 4.4). Область определения:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ; область значений:  $y \in [-1, 1]$ . Функция периодическая (период  $2\pi$ ), нечетная, ограниченная, непрерывная (п. 5.3.1°). Промежутки монотонности:  $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$ ; корни:  $x_n = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

2)  $y = \cos x$ . График — косинусоида (штриховая линия на рис. 4.4). Косинусоида получается из синусоиды сдвигом влево на  $\pi/2$ . Область определения:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ; область значений:  $y \in [-1, 1]$ . Функция периодическая (период  $2\pi$ ), четная, ограниченная, непрерывная. Промежутки монотонности:  $(n\pi, \pi + n\pi)$ , корни:  $x_n = \pi/2 + n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

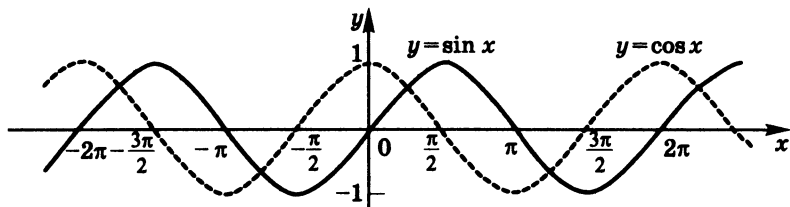


Рис. 4.4.

Графики синуса и косинуса

3)  $y = \operatorname{tg} x$ . График — тангенсоида (сплошная линия на рис. 4.5). Область определения: вся действительная ось  $(-\infty, +\infty)$ , за исключением точек  $x_k = \pi/2 + k\pi$ ; область значений:  $(-\infty, +\infty)$ . Функция периодическая (период  $\pi$ ), нечетная, неограниченная, непрерывная при  $x \neq \pi/2 + k\pi$ , имеет бесконечные разрывы в точках  $x_k = \pi/2 + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). На каждом промежутке непрерывности функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастающая.

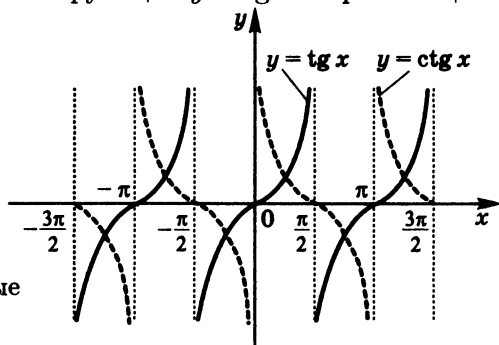


Рис. 4.5.

Графики тангенса и котангенса (вертикальные линии — асимптоты)

4)  $y = \operatorname{ctg} x$ . График — котангенсоида (штриховая линия на рис. 4.5). Область определения: вся действительная ось  $(-\infty, +\infty)$ , за исключением точек  $x_m = m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ); область значений:  $(-\infty, +\infty)$ . Функция периодическая (период  $\pi$ ), нечетная, неограниченная, непрерывная при  $x \neq m\pi$ , имеет бесконечные разрывы в точках  $x_m = m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ). На каждом промежутке непрерывности функция  $y = \operatorname{ctg} x$  убывающая.

4°. Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в табл. 4.2. В этой таблице условный знак  $\infty$  означает, что в самой точке  $\alpha_0$  функция не определена; при этом существует бесконечный предел (п. 5.2.3°):

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(\alpha) = \infty.$$

Таблица 4.2

**Значения тригонометрических функций для некоторых значений аргумента**

Функция	Угол $\alpha$					
	0 0°	$\pi/6$ 30°	$\pi/4$ 45°	$\pi/3$ 60°	$\pi/2$ 90°	$\pi$ 180°
$\sin \alpha$	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$\infty$

## 4.2. Тригонометрические формулы

1°. *Формулы приведения* полезны для упрощения аргументов тригонометрических функций:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha$$

(через период функции не меняют значений);

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha, \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

(через половину периода синус и косинус меняют знаки);

$$\sin(\alpha \pm \pi/2) = \pm \cos \alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi/2) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi/2) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha + \pi/2 + \pi n) = (-1)^n \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \pi/2 + \pi n) = (-1)^{n+1} \sin \alpha.$$

В этих формулах  $n$  — любое целое число ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Свойства четности и нечетности:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Функции дополнительных углов:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin \alpha.$$

## Примеры

$$1) \sin 1873^\circ = \sin(73^\circ + 360^\circ \cdot 5) = \sin 73^\circ = \\ = \sin(90^\circ - 17^\circ) = \cos 17^\circ;$$

$$2) \cos\left(-27\frac{3}{8}\pi\right) = \cos\left(-28\pi + \frac{5\pi}{8}\right) = \cos\frac{5\pi}{8} = \\ = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\frac{3\pi}{8};$$

$$3) \operatorname{ctg} 539^\circ = \operatorname{ctg}(539^\circ - 180^\circ \cdot 3) = -\operatorname{ctg} 1^\circ.$$

Формулы приведения могут быть получены с помощью формул для функций от суммы (разности) углов (см. ниже) или с помощью геометрических соображений.

## 2°. Основные формулы тригонометрии:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \text{ (теорема Пифагора),} \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Следствия этих формул:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, & \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1, & \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha, \\ 1 + \cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, & 1 - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, & \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha),$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Тригонометрические функции кратных углов (т. е. углов вида  $n\alpha$ ) см. в п. 7.3.6°.

### 4.3. Обратные тригонометрические функции

1°. Поскольку синус — немонотонная функция, то для введения обратной функции следует выбрать какой-либо промежуток монотонности синуса. Принято следующее определение. *Арксинус* числа  $x \in [-1, 1]$  — это угол  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ , синус которого равен  $x$ :

$$y = \arcsin x, \quad \sin y = x.$$

Например,

$$\arcsin 0,5 = \pi/6,$$

$$\arcsin 0 = 0,$$

$$\arcsin 1 = \pi/2, \quad \arcsin \left(-1/\sqrt{2}\right) = -\pi/4,$$

$\arcsin 2$  не существует (в области комплексных чисел уравнение  $\sin z = 2$  имеет решение, см. п. 7.5.2°). График функции  $y = \arcsin x$  приведен на рис. 4.6 (сплошная линия). Область определения:  $x \in [-1, 1]$ ; область значений:  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Функция возрастающая, нечетная, ограниченная, непрерывная.

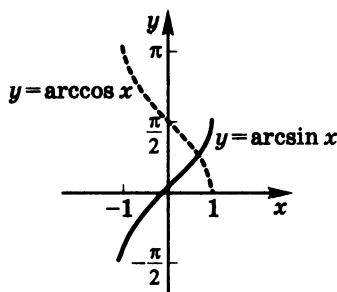


Рис. 4.6.  
Графики арксинуса  
и арккосинуса

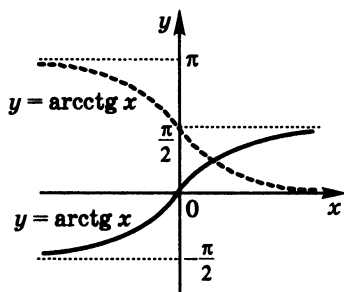


Рис. 4.7.  
Графики арктангенса  
и арккотангенса  
(горизонтальные штриховые  
линии — асимптоты)

2°. *Арккосинус* — обратная функция для косинуса:

$$y = \arccos x, \quad \cos y = x; \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi].$$

График приведен на рис. 4.6 (штриховая линия). Область определения:  $x \in [-1, 1]$ ; область значений:  $y \in [0, \pi]$ . Функция убывающая, ограниченная, непрерывная, свойств четности (нечетности) не имеет.

3°. *Арктангенс* — обратная функция для тангенса:

$$y = \arctg x, \quad \tg y = x; \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

График приведен на рис. 4.7 (сплошная линия). Область определения:  $x \in (-\infty, +\infty)$ ; область значений:  $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Функция возрастающая, ограниченная, непрерывная, нечетная;

$$\arctg x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\pi/2.$$

4°. *Арккотангенс* — обратная функция для котангенса:

$$y = \operatorname{arccotg} x, \quad \operatorname{ctg} y = x; \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, \pi).$$

График приведен на рис. 4.7 (штриховая линия). Функция убывающая, ограниченная, непрерывная, свойств четности (нечетности) не имеет;

$$\operatorname{arccotg} x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \pi, \quad \operatorname{arccotg} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

5°. Некоторые формулы для обратных тригонометрических функции:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, & \cos(\arccos x) &= x, \\ \arcsin(\sin x) &= x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2], & \arccos(\cos x) &= x, \quad x \in [0, \pi], \\ \arcsin(-x) &= -\arcsin x, & \arccos(-x) &= \pi - \arccos x, \\ \arctg(-x) &= -\arctg x, & \operatorname{arccotg}(-x) &= \pi - \operatorname{arccotg} x, \\ \arcsin x + \arccos x &= \pi/2, & \arctg x + \operatorname{arccotg} x &= \pi/2, \\ \arcsin x &= \arccos \sqrt{1-x^2}, & \arccos x &= \arcsin \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1], \\ \operatorname{arccotg} x &= \arctg(1/x), \quad x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

#### 4.4. Тригонометрические уравнения и неравенства

1°. Простейшие тригонометрические уравнения и их решения:

$$\begin{aligned} \sin x &= 0, \quad x = \pi n; & \operatorname{tg} x &= 0, \quad x = \pi n; \\ \cos x &= 0, \quad x = \pi/2 + \pi n; & \operatorname{ctg} x &= 0, \quad x = \pi/2 + \pi n; \\ \sin x &= 1, \quad x = \pi/2 + 2\pi n; & \sin x &= -1, \quad x = -\pi/2 + 2\pi n; \\ \cos x &= 1, \quad x = 2\pi n; & \cos x &= -1, \quad x = \pi(2n+1); \\ \sin x &= a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad a \in [-1, 1]; \\ \cos x &= a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad a \in [-1, 1]; \\ \operatorname{tg} x &= a, \quad x = \arctg a + \pi n; & \operatorname{ctg} x &= a, \quad x = \operatorname{arccotg} x + \pi n. \end{aligned}$$

В этих формулах  $n$  — любое целое число ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

2°. Для решения уравнений вида  $f(\varphi(x))$ , содержащих какую-либо одну тригонометрическую функцию  $\varphi(x)$ , вводят



обозначение  $t = \varphi(x)$  и находят корни  $t_1, t_1, \dots, t_m$  полученного уравнения  $f(t) = 0$ . Затем для каждого из этих корней составляют и решают уравнения

$$\varphi(x) = t_1, \varphi(x) = t_2, \dots, \varphi(x) = t_m. \quad (4.1)$$

Ответ получается объединением (п. 2.1.1°) множеств решений каждого из уравнений (4.1).

### Примеры

1)  $2 \cos^2 2x - 9 \cos 2x + 4 = 0$ . Полагая  $t = \cos 2x$ , где  $t \in [-1, 1]$ , получаем квадратное уравнение  $2t^2 - 9t + 4 = 0$ , корни которого  $t_1 = 4, t_2 = 1/2$ . Корень  $t_1$  не дает решений тригонометрического уравнения (так как  $|\cos 2x| \leq 1$ ). Корню  $t_2$  соответствует уравнение  $\cos 2x = 1/2$ , откуда  $2x = \pm\pi/3 + 2\pi n$ , или  $x = \pm\pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + 1 = 0$ . Приведем уравнение к виду, содержащему одну тригонометрическую функцию:

$$2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

Удобно разделить обе части уравнения на  $\cos^2 x$  (это можно сделать, так как если  $\cos x = 0$ , то  $\sin^2 x = 1$  и уравнение не удовлетворяется):

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

Подстановка  $t = \operatorname{tg} x$  дает уравнение  $t^2 - 4t + 3 = 0$ , корни которого  $t_1 = 1, t_2 = 3$ . Для  $x$  имеем два уравнения:  $\operatorname{tg} x = 1$  и  $\operatorname{tg} x = 3$ , откуда находим корни исходного уравнения:

$$x = \pi/4 + \pi n, \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3°. В некоторых случаях тригонометрические уравнения приводятся к виду

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad \text{где } a \neq 0, b \neq 0. \quad (4.2)$$

Выражение в левой части (4.2) может быть преобразовано к виду синуса (или косинуса) сдвинутого аргумента:

$$a \sin x + b \cos x = D \left( \frac{a}{D} \sin x + \frac{b}{D} \cos x \right),$$

где  $D = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ , знак перед корнем совпадает со знаком  $a$ . Теперь коэффициенты в скобке при  $\sin x$  и  $\cos x$  можно рассматривать как  $\cos \gamma$  и  $\sin \gamma$  некоторого вспомогательного угла  $\gamma$ :

$$a/D = \cos \gamma, \quad b/D = \sin \gamma.$$

Угол  $\gamma$  находится по формуле

$$\gamma = \operatorname{arctg}(b/a), \quad \gamma \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Итак,

$$a \sin x + b \cos x = D \sin(x + \gamma), \quad (4.3)$$

и уравнение (4.2) приведено к простейшему виду

$$\sin(x + \gamma) = d, \text{ где } d = c/D.$$

Отметим, что формула (4.3) имеет физический смысл сложения двух гармонических колебаний, имеющих одинаковую частоту (§ Ф5.2).

### Пример

$\cos x \sin x + 3 \cos 2x = 0$ . Так как

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x),$$

то уравнение равносильно следующему:

$$(\cos x + \sin x) [1 + 3(\cos x - \sin x)] = 0.$$

Получаем совокупность двух уравнений:

$$\text{а) } \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\pi/4 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \sin x - \cos x = \frac{1}{3}, \text{ или } \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \frac{1}{3};$$

здесь  $\gamma = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$ , и уравнение приводится к виду  $\sin(x - \pi/4) = 1/3\sqrt{2}$ , откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Другой способ решения уравнения (4.2) состоит в подстановке  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ ; при этом  $\sin x$  и  $\cos x$  выражаются через  $t$  по формулам п. 4.2.2°:

$$\frac{2at}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} = c.$$

Получается квадратное уравнение для  $t$ , корням которого  $t_1$  и  $t_2$  соответствуют два уравнения простейшего вида

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_2.$$

Уравнение (4.2) можно также решить, перенеся  $b \cos x$  в правую часть и возводя обе части уравнения в квадрат; тогда получим для  $\cos x$  квадратное уравнение

$$a^2(1 - \cos^2 x) = b \cos^2 x - 2bc \cos x + c^2.$$

Этот способ обладает недостатком: при возведении уравнения в квадрат появляются посторонние корни, и необходима проверка ответов.

4°. Тригонометрические неравенства сводят к простейшим:

$$\sin x < a, \quad \cos x < a, \quad \operatorname{tg} x < a, \quad \operatorname{ctg} x < a$$

и аналогичным противоположным строгим или нестрогим неравенствам. Решая простейшие тригонометрические неравенства, полезно представлять себе график соответствующей функции или единичный круг.

### Примеры

1)  $\operatorname{tg} x < a$ . При любом  $a \in \mathbb{R}$  решение есть объединение промежутков вида  $(-\pi/2 + \pi n, \operatorname{arctg} a + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (рис. 4.8).

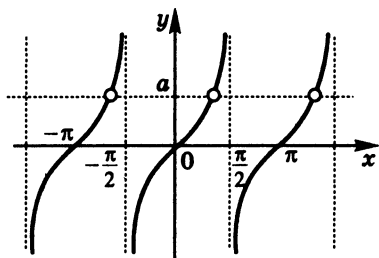


Рис. 4.8.

К решению неравенства  
 $\operatorname{tg} x < a$

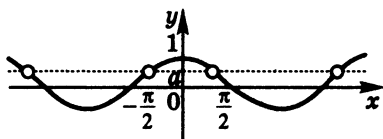


Рис. 4.9.

К решению неравенства  
 $\cos x \leq a$

$$2) \cos x \leq a.$$

Если  $a < -1$ , решений нет; если  $a = -1$ ,  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; если  $-1 < a \leq 1$ ,  $x \in [\arccos a + 2\pi n, 2\pi - \arccos a + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , (рис. 4.9); если  $a > 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 5. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятия предела последовательности и функции лежат в основе математического анализа. Исследованием свойств функций с помощью понятия производной занимается дифференциальное исчисление, задачей восстановления функции по ее заданной производной — интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения и ряды часто встречаются при формулировке и решении физических и математических задач.

### 5.1. Последовательности

1°. *Последовательность* — это множество чисел, упорядоченное номером (т. е. перенумерованное). Последовательности бывают *конечные*:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и *бесконечные*:  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  называются *членами* последовательности. Примеры: последовательность натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots$  (здесь  $x_n = n$ ); конечная последовательность  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ; последовательность десятичных приближений дроби  $1/3$ :  $x_1 = 0,3$ ,  $x_2 = 0,33$ ,  $x_3 = 0,333$ , ... (п. 1.2.4°). Последовательность с *общим членом*  $x_n$  обозначают кратко  $\{x_n\}$ .

2°. У некоторых бесконечных последовательностей члены с большими номерами оказываются близкими к какому-то постоянному числу, причем это приближение тем точнее, чем больше номер члена.

Определение: число  $a$  называется *пределом последовательности*  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , если для любого (сколь угодно малого) положительного числа  $\varepsilon$  найдется номер  $N$  такой, что при всех  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Принято писать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

(читается «предел  $x_n$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности, равен  $a$ » или « $x_n$  стремится к  $a$ , когда  $n$  стремится к бесконечности»). Говорят также, что  $x_n$  *сходится* к  $a$ .

Геометрически  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  означает, что точки  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  неограниченно приближаются к точке  $a$  при неограниченном увеличении номера. Можно также сказать, что в любую (сколь угодно малую) окрестность точки  $a$  попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера  $N$  (рис. 5.1). (Окрестность точки  $a$  — это интервал, середина которого совпадает с данной точкой  $a$ .)

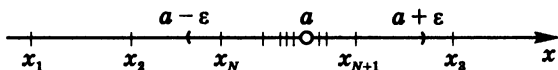


Рис. 5.1.

В окрестность  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  точки  $a$  попадают все члены последовательности  $\{x_n\}$ , начиная с некоторого номера  $N$

### Примеры

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , так как  $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ , и в качестве  $N$  годится любое натуральное число, большее чем  $1/\varepsilon$ . Например, если  $\varepsilon = 0,1$ , то  $N > 10$ ; если  $\varepsilon = 0,001$ , то  $N > 1000$ ; и т. д.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

*Теоремы о пределах последовательностей:*

1) если предел последовательности существует, то он единственный;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$  — предел постоянной равен этой постоянной;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  — предел суммы равен сумме пределов;

4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma x_n) = \gamma \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  — постоянный множитель можно выносить за знак предела;

5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  — предел произведения равен произведению пределов;

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$  — предел отношения равен отношению пределов;

7) ограниченная монотонная последовательность имеет предел;

8) если  $\alpha_n \leq x_n \leq \beta_n$  и обе последовательности  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  имеют один и тот же предел  $c$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ .

В теоремах 3) — 6) предполагается, что все пределы в правой части равенств существуют.

**3°. Последовательность  $\{x_n\}$  называется возрастающей**, если для любого  $n$  верно  $x_{n+1} > x_n$ ; **убывающей**, если  $x_{n+1} < x_n$ ; **невозрастающей**, если  $x_{n+1} \leq x_n$ ; **неубывающей**, если  $x_{n+1} \geq x_n$ . Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями. Последовательность называется *ограниченной*, если  $|x_n| \leq C$  или  $C_1 \leq x_n \leq C_2$ , где  $C, C_1, C_2$  — некоторые постоянные. Пример применения теоремы 7): возьмем какую-нибудь правильную десятичную дробь  $x_n$ , имеющую  $n$  цифр в дробной части. Припишем справа любую цифру, получим  $x_{n+1}$ , и т. д. Предел такой последовательности дробей существует, так как  $0 \leq x_n \leq 1$  и  $x_{n+1} \geq x_n$ .

### Примеры

Вычисление пределов с помощью теорем о пределах последовательностей:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 1$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)^2 = 0$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+1/n)}{n(3-5/n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2+1/n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3-5/n)} = \frac{2}{3}$ .

*Бесконечно малая* последовательность — это последовательность, предел которой равен нулю.

**Теорема:** произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность. Например, последовательность  $x_n = \sin n$  — ограниченная,  $y_n = 1/n$  — бесконечно малая; следовательно, последовательность  $z_n = (1/n) \sin n$  — бесконечно малая, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

**4°. Если члены последовательности с ростом номера неограниченно возрастают, то говорят о *бесконечном пределе последовательности*.**

**Определение:** предел последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  равен бесконечности, если для любого (сколь угодно большого) числа  $E > 0$  найдется номер  $N$  такой, что при всех  $n \geq N$  выполняется неравенство

$$|x_n| > E. \quad (5.1)$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Например,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$ , так как  $\sqrt{n} > E \Leftrightarrow n > E^2$  и можно взять  $N > E^2$ .

Если вместо неравенства (5.1) выполняется неравенство  $x_n > E$  (или  $x_n < -E$ ), то говорят, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  (соответственно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ). Например,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{1}{n} = -\infty.$$

*Бесконечно большая* последовательность — это последовательность, предел которой равен бесконечности.

Теорема:

если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ ;

если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ .

5°. *Арифметической прогрессией* называется последовательность (конечная или бесконечная), каждый последующий член которой равен предыдущему плюс некоторое постоянное число, называемое *разностью прогрессии*:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Формула общего члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Примеры

1) Числа 3, 5, 7, 9, ... составляют арифметическую прогрессию, где  $a_1 = 3$ ,  $d = 2$ .

2) Числа 20,5; 15,5; 10,5; 5,5; 0,5; -4,5; -9,5; ... составляют арифметическую прогрессию, где  $a_1 = 20,5$ ,  $d = -5$ .

Основное свойство арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \quad (5.2)$$

т. е. каждый член равен среднему арифметическому (полусумме) предыдущего и последующего членов.

Сумма  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  первых  $n$  членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \text{ или } S_n = n \left[ a_1 + \frac{(n-1)d}{2} \right]. \quad (5.3)$$

В частности, сумма первых  $n$  натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример

Завод выпускает приборы. Определим, сколько приборов выпущено за 10 лет, если за первый год было выпущено



10 тыс. приборов, а в каждый последующий год выпуск увеличивался на 2 тыс. приборов.

Ежегодный выпуск составляет арифметическую прогрессию с первым членом  $a_1 = 10\,000$ , разностью  $d = 2000$  и числом членов  $n = 10$ . Общий выпуск за 10 лет равен сумме 10 членов арифметической прогрессии. По второй формуле (5.3) находим

$$S_{10} = 10 \cdot \left( 10\,000 + \frac{9 \cdot 2000}{2} \right) = 190\,000.$$

**6°. Геометрической прогрессией** называется последовательность (конечная или бесконечная), каждый последующий член которой равен предыдущему члену, умноженному на некоторое постоянное число, называемое *знаменателем прогрессии*:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

Формула общего члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

### Примеры

1) Числа 3, 6, 12, 24, 48 составляют геометрическую прогрессию, где  $b_1 = 3$ ,  $q = 2$ .

2) Числа 40,  $-20$ , 10,  $-5$ ,  $5/2$ ,  $-5/4$ , ... составляют геометрическую прогрессию, где  $b_1 = 40$ ,  $q = -1/2$ .

3) Активность (скорость распада) радиоактивного изотопа некоторого элемента убывает в 2 раза через каждые 60 секунд. Значения активности изотопа в начальный момент и через 1, 2, 3, ... минуты составляют геометрическую прогрессию  $b_1, b_2, b_3, \dots$  со знаменателем  $q = 0,5$ . Через 30 минут активность будет равна  $b_{31} = b_1 q^{30} = 2^{-30} \cdot b_1$ , т. е. приблизительно в  $10^9$  раз меньше первоначальной.

Основное свойство геометрической прогрессии:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \quad (5.5)$$

т. е. каждый член по модулю равен среднему геометрическому предыдущего и последующего членов.

Сумма  $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$  первых  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q}, \quad \text{или} \quad S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (5.6)$$

### Пример

Завод выпускает приборы. Определим, сколько приборов будет выпущено за 10 лет, если за первый год выпущено 10 тыс. приборов, а ежегодный прирост составляет 5% выпуска предыдущего года.

Ежегодный выпуск составляет геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1 = 10\,000$ , знаменателем  $q = 1,05$  и числом членов  $n = 10$ . Общий выпуск за 10 лет равен сумме 10 членов геометрической прогрессии. По второй формуле (5.6) находим

$$S_{10} = 10\,000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} \approx 10\,000 \cdot 12,578 = 125\,780.$$

**7°. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия** — геометрическая прогрессия, у которой знаменатель по модулю меньше единицы:  $|q| < 1$ . В этом случае справедливы формулы (5.4) — (5.6), кроме того, существует предел суммы  $n$  членов прогрессии при  $n \rightarrow \infty$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = b_1 \frac{1}{1 - q}. \quad (5.7)$$

### Примеры

1) Найдем сумму ряда (§ 5.8)

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

По формуле (5.7) получаем

$$S = 1 \cdot \frac{1}{1 - 0,5} = 2.$$

2) *Парадокс Зенона*. Догонит ли Ахиллес черепаху? Ахиллес, скорость которого равна  $V$ , хочет догнать черепаху, ползущую от него со скоростью  $v$ , причем  $v < V$ . Пусть в начальный момент расстояние между ними равно  $d_1$ . Пока Ахиллес пройдет путь  $d_1$ , черепаха проползет расстояние  $d_2$ ; пока Ахиллес пройдет путь  $d_2$ , черепаха еще проползет расстояние  $d_3$ , и т. д. Может показаться, что Ахиллес никогда не догонит черепаху (?)

*Объяснение парадокса*. Время  $t_1$ , за которое Ахиллес пройдет путь  $d_1$ :  $t_1 = d_1/V$ ; тогда  $d_2 = t_1 \cdot v = d_1 \cdot v/V$ . Время  $t_2$ , за которое Ахиллес пройдет путь  $d_2$ :  $t_2 = d_2/V = (d_1/V) \cdot v/V$ ; тогда  $d_3 = d_1 \cdot (v/V)^2$ , и т. д.;

$$d_n = d_1 \cdot (v/V)^{n-1}, \quad t_n = (d_1/V) \cdot (v/V)^{n-1}.$$

Видно, что промежутки времени  $t_1, t_2, t_3, \dots$  образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1 = d_1/V$  и знаменателем  $q = v/V < 1$ . Полное время движения Ахиллеса и черепахи равно сумме всех промежутков времени:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots = \frac{d_1}{V} \cdot \frac{1}{1 - v/V} = \frac{d_1}{V - v}.$$

Таким образом, Ахиллес догонит черепаху за конечное время  $t$ . Результат очевиден, поскольку это время сразу можно найти (без геометрической прогрессии) делением начального расстояния на относительную скорость  $V - v$ .

## 8°. Последовательность

$$x_n = (1 + 1/n)^n$$

имеет конечный предел  $e = 2,7182818\dots$ . Доказано, что  $e$  — число иррациональное (п. 2.2.3°).

## 5.2. Предел функции

1°. Понятие предела функции лежит в основе математического анализа. Если значения функции приближаются к некоторому числу  $b$ , когда значения аргумента приближаются к числу  $a$ , то это число  $b$  называют *пределом функции* в точке  $a$ .

Определение («на языке  $\varepsilon - \delta$ »): число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  в точке  $a$  (или при стремлении  $x$  к  $a$ ), если для любого (сколь угодно малого) числа  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta, \quad (5.8)$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (5.9)$$

Принято писать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b.$$

*Замечание.* В данном определении предполагается, что функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$  (за исключением, возможно, самой точки  $a$ ) и что  $x$  в неравенствах (5.8) и (5.9) принадлежит этой окрестности.

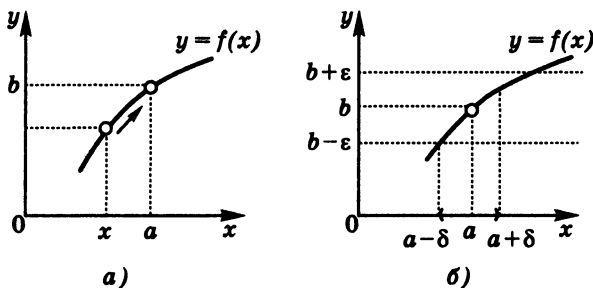


Рис. 5.2.

Точки графика функции:

$a$  — приближаются к точке  $(a, b)$  при  $x \rightarrow a$ ;

$b$  — лежат в полоске  $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$  при всех  $x \in (a - \delta, a + \delta)$

Геометрически  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  означает, что точки графика функции  $y = f(x)$  приближаются к точке  $(a, b)$  на плоскости  $xy$  при приближении точки  $x$  к точке  $a$  на оси  $x$  (рис. 5.2, а). Неравенства (5.8) и (5.9) геометрически означают, что при всех  $x$ , достаточно близких к  $a$ , точки графика функции  $f(x)$  лежат в сколь угодно узкой полоске вида

$$b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$$

(рис. 5.2, б).

*Теоремы о пределах функций:*

1) если предел функции в точке  $a$  существует, то он единственный;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  — предел постоянной равен этой постоянной;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  — предел суммы равен сумме пределов;

4)  $\lim_{x \rightarrow a} [\gamma f(x)] = \gamma \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  — постоянный множитель можно выносить за знак предела;

5)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  — предел произведения равен произведению пределов;

6)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  — предел отношения равен отношению пределов.

В теоремах 3) — 6) предполагается существование пределов всех функций в правых частях равенств.

**Примеры**

Вычисление пределов с помощью теорем о пределах функций:

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + x^2}{7x - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (7x - 4)} = \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 3 + \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x}{7 \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 4} = -0,75;
 \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

2°. В некоторых вопросах важно изучать поведение функции не просто вблизи заданной точки, как в п. 1°, а с одной стороны от этой точки — слева или справа (*односторонние пределы*).

Определение: число  $b_1$  называется *левым пределом* (или *пределом слева*) функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$a - \delta < x < a \quad (5.10)$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - b_1| < \varepsilon. \quad (5.11)$$

Принято писать

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1, \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-0} b_1, \quad \text{или} \quad f(a-0) = b_1.$$

В данном определении предполагается, что функция  $f(x)$  определена в левой полуокрестности точки  $a$ , т. е. при  $x \in (a - \gamma, a)$ , где  $\gamma > 0$ , и что  $x$  в неравенствах (5.10) и (5.11) принадлежит этой полуокрестности.

Аналогично определяется *правый предел* (или *предел справа*):

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2, \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+0} b_2 \quad \text{или} \quad f(a+0) = b_2.$$

В этом случае (5.10) следует заменить неравенством  $a < x < a + \delta$ .

Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x}{|x|} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{|x|} = +1,$$

предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$  не существует.

Обычный предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует в том и только в том случае, когда левый и правый пределы в этой точке существуют и равны.

**3°.** Если при приближении  $x$  к некоторой точке  $a$  значения функции неограниченно возрастают, говорят о бесконечном пределе функции в этой точке.

**Определение:** функция  $f(x)$  имеет в точке  $a$  бесконечный предел, если для любого (сколь угодно большого) числа  $E > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - a| < \delta, \quad (5.12)$$

выполняется неравенство

$$|f(x)| > E. \quad (5.13)$$

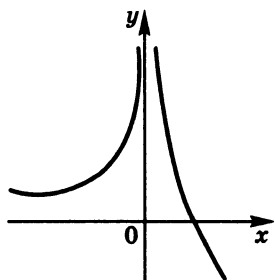


Рис. 5.3.

Бесконечный предел  
в точке  $x = 0$

Принято писать  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$  (читается «предел  $f(x)$  в точке  $a$  равен бесконечности» или « $f(x)$  стремится к бесконечности при  $x \rightarrow a$ »). График функции  $y = f(x)$ , имеющей бесконечный предел в точке

$a$ , при  $x \rightarrow a$  неограниченно удаляется от оси  $x$ , приближаясь к прямой  $x = a$  («вертикальная асимптота», см. рис. 5.3).

Если при  $x$ , удовлетворяющих (5.12), вместо (5.13) выполняется неравенство  $f(x) > E$  (или  $f(x) < -E$ ), то говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (\text{соответственно } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty).$$

Вводятся также односторонние бесконечные пределы.

**Замечание.** Возможен случай, когда левый предел конечный, а правый бесконечный (или наоборот); например (рис. 5.4, а),

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} e^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{1/x} = +\infty.$$

Возможен также случай, когда при  $x \rightarrow a$  нет ни конечного, ни бесконечного предела; например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

не существует: когда  $x$  приближается к нулю, функция колеблется от  $-1$  до  $+1$  со все возрастающей частотой (рис. 5.4, б).

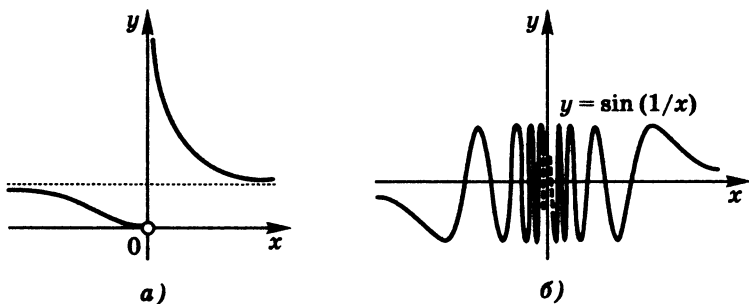


Рис. 5.4.

*a* — левый предел 0, правый  $+\infty$ ;

*б* — в точке  $x = 0$  нет никакого предела

### Примеры

Односторонние и бесконечные пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x^3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x^3} = +\infty;$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x} = -\frac{\pi}{2};$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$

4°. Если при неограниченном возрастании аргумента значения функции приближаются к некоторому числу, говорят о пределе функции на бесконечности.

Определение: число  $b_1$  называется *пределом функции*  $f(x)$  *на плюс бесконечности*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\Delta > 0$  такое, что при всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству

$$x > \Delta, \quad (5.14)$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - b_1| < \varepsilon.$$

Принято писать

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_1, \quad \text{или} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b_1.$$

В данном определении предполагается, что функция  $f(x)$  определена в окрестности плюс бесконечности, т. е. при  $x > \gamma$ ,



где  $\gamma > 0$  — некоторое число. Геометрически  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b_1$  означает, что при неограниченном удалении точки  $x$  от начала координат вправо график функции неограниченно приближается к прямой  $x = b_1$  («горизонтальная асимптота», см. рис. 5.5).

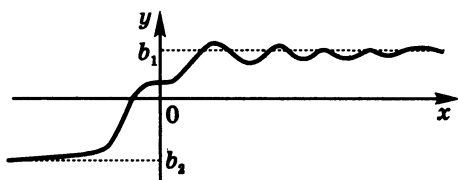


Рис. 5.5.

Конечные пределы при  $x \rightarrow -\infty$   
и  $x \rightarrow +\infty$

Определение *предела функции на минус бесконечности*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  отличается от определения  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  тем, что вместо (5.14) следует написать неравенство  $x < -\Delta$ .

Геометрически  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} b_2$  означает, что при неограниченном удалении влево от начала координат график функции неограниченно приближается к прямой  $y = b_2$  (рис. 5.5).

### Примеры

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\pi/2$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

### 5°. Вычисление пределов функции.

Для непрерывных функций (§ 5.3) вычисление пределов в точках, принадлежащих области определения, сводится к подстановке соответствующих значений аргумента функции, т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . В частности, это правило относится к элементарным функциям ( $x^a$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  и их комбинациям).

### Примеры

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin x = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-1} = 0$ ;

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \neq \frac{\sin 0}{0} \text{ (нуль не входит в область определения).}$$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ , т. е. величина, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая; если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ , т. е. величина, обратная к бесконечно большой, есть бесконечно малая. Здесь  $a$  означает конечную точку или символ  $\infty$ .

### Пример

Потенциал электростатического поля точечного заряда  $Q$  в точке, удаленной от заряда на некоторое расстояние  $r$ , равен  $\varphi = Q/r$  (п. Ф4.1.2°). Если  $r \rightarrow 0$  (точка наблюдения приближается к заряду), то потенциал бесконечно растет:  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$ . При стремлении  $r$  к бесконечности (удаление от заряда) потенциал убывает:  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ . Здесь роль функции  $f(r)$  играет выражение  $r/Q$ .

Выражения вида  $f(x)/g(x)$  в случаях, когда  $f(x) \xrightarrow{r \rightarrow a} 0$  и  $g(x) \xrightarrow{r \rightarrow a} 0$  либо  $f(x) \xrightarrow{r \rightarrow a} \infty$  и  $g(x) \xrightarrow{r \rightarrow a} \infty$ , называются *неопределенностями* вида  $0/0$  или  $\infty/\infty$ . *Раскрыть неопределенность* — значит вычислить  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Способы раскрытия неопределенностей вида  $0/0$  и  $\infty/\infty$ :

- 1) тождественное преобразование выражения;
- 2) использование «основных пределов»:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} &= e, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \end{aligned}$$

(о числе  $e$  см. в п. 5.1.8°);

3) применение *правила Лопиталья*: если существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных двух функций, то предел отношения этих функций существует и равен пределу отношения производных:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(иногда правило Лопиталья приходится применять несколько раз подряд).

### Примеры

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)(x + 1) = 2 \cdot 2 = 4, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 - \sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - x^{-1} + x^{-2})}{x^2(3 - x^{-3/2} - 2x^{-2})} = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{8x}{\sin 8x} \cdot \frac{5}{8} \right) = \\ &= \frac{5}{8} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \right) \bigg/ \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} \right) = \frac{5}{8}; \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(\sin 8x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{8 \cos 8x} = \frac{5}{8},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x-1)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

(в последнем примере правило Лопиталья применено дважды, так как после первого применения опять получилась неопределенность вида  $0/0$ );

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{4x(x^2-1)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} = \infty.$$

Неопределенности вида  $0 \cdot \infty$  и  $\infty - \infty$  раскрывают, сводя их предварительно к видам  $0/0$  или  $\infty/\infty$ .

**Примеры**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

(применено правило Лопиталья);

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x - \sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(дважды применено правило Лопиталья).

Неопределенность вида  $1^\infty$  — это выражение  $u(x)^{v(x)}$ , где  $u(x) \rightarrow 1$ ,  $v(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow a$ ; например,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ . Один из способов раскрытия такой неопределенности — применение логарифмов:

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow a} [v(x) \ln u(x)] \right\}. \quad (5.15)$$

**Пример**

$$P = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\operatorname{ctg} x} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{ctg} x \cdot \ln(1+2x)] \right\},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{ctg} x \cdot \ln(1+2x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \cos x \cdot \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} \right] = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1+2x) \cos x} = 2 \end{aligned}$$

(применено правило Лопиталья); итак,  $P = e^2$ .

Неопределенность вида  $0^0$  раскрывают, применяя логарифмы, по формуле (5.15).

**Пример**

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \exp \{ (x \ln x) \} = e^0 = 1$$

(предел  $\lim_{x \rightarrow 0+0} (x \ln x) = 0$ , как показано ранее).

### 5.3. Непрерывность функции. Разрывы

1°. Говорят, что функция  $f(x)$  *непрерывна в точке  $a$* , если предел функции в точке  $a$  равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (5.16)$$

В данном определении предполагается, что функция определена в самой точке  $a$  и в некоторой ее окрестности.

Функция  $f(x)$  *непрерывна слева* в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ , т. е. левый предел (п. 5.2.2°) в этой точке существует и равен значению функции в точке  $a$ . Аналогично  $f(x)$  *непрерывна справа* в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a).$$

Говорят, что:

1) функция непрерывна на интервале  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала;

2) функция непрерывна на замкнутом промежутке  $[a, b]$ , если она непрерывна на интервале  $(a, b)$  и непрерывна справа в точке  $a$  и слева в точке  $b$ .

График непрерывной функции имеет вид сплошной линии. Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения. Например, многочлены, синус, косинус, экспонента непрерывны на всей действительной оси, тангенс непрерывен при  $x \neq \pi/2 + n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Дробно-рациональная функция (п. 3.3.4°) непрерывна во всех точках, где ее знаменатель не равен нулю.

Свойства непрерывных функций:

1) сумма и произведение двух непрерывных функций непрерывны;

2) отношение двух непрерывных функций непрерывно всюду, где знаменатель не равен нулю;

3) если функция  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $x = a$  и функция  $f(u)$  непрерывна в точке  $u = \varphi(a)$ , то *сложная функция*  $f(\varphi(x))$  непрерывна в точке  $x = a$ ; например,  $\sin(x^3 + 1)$  непрерывен при  $x \in \mathbb{R}$ , так как многочлен  $x^3 + 1$  непрерывен при  $x \in \mathbb{R}$  и  $\sin u$  непрерывен при  $u \in \mathbb{R}$  (здесь  $u = x^3 + 1$ );

4) функция, непрерывная на замкнутом промежутке, ограничена;

5) функция, непрерывная на замкнутом промежутке, достигает на нем своего наибольшего и своего наименьшего значений;

6) если непрерывная функция меняет знак на замкнутом промежутке  $[a, b]$ , то она имеет по крайней мере один корень внутри интервала  $(a, b)$  (*теорема Коши*).

2°. Если в некоторой точке  $x_0$  не выполняется равенство (5.16), говорят, что в этой точке функция имеет *разрыв*. Здесь предполагается, что функция определена слева и справа от точки  $x_0$ , т. е. при  $a < x < x_0$  и при  $x_0 < x < b$ . Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва* функции.

### Классификация разрывов.

1) Разрыв I рода: *устранимый разрыв*, если существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , но при этом  $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , либо функция не определена в точке  $x_0$  (точки  $x_1$  и  $x_2$  на рис. 5.6, а); *неустранимый разрыв* или *скачок*, если существуют оба односторонних

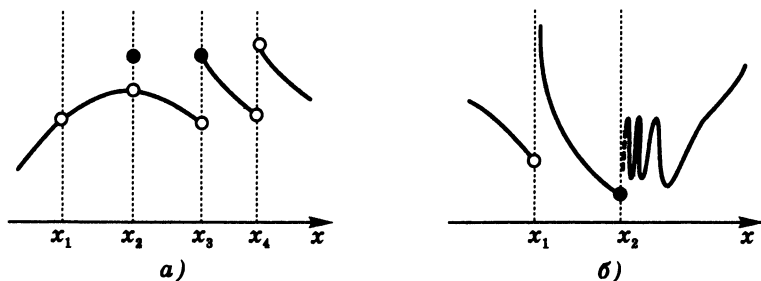


Рис. 5.6.

а — разрывы I рода; б — разрывы II рода

предела  $b_1 = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и  $b_2 = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ , но  $b_1 \neq b_2$  (точки  $x_3$  и  $x_4$  на рис. 5.6, а).

2) Разрыв II рода: хотя бы один из двух односторонних пределов бесконечен или не существует никакого предела (точки  $x_1$  и  $x_2$  на рис. 5.6, б).

Устранимые разрывы на практике обычно считаются устраненными.

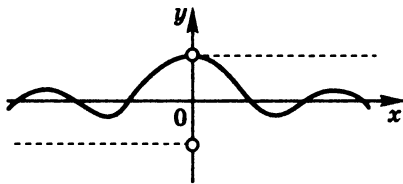
### Примеры

Разрывы I рода:

1)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , устранимый разрыв в точке  $x_0 = 0$  (сплошная линия на рис. 5.7);

2)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , скачок в точке  $x_0 = 0$  (штриховая линия на рис. 5.7).

Рис. 5.7.  
Графики функций  
 $y = \frac{\sin x}{x}$  и  $y = \frac{|x|}{x}$



Разрывы II рода:

3)  $f(x) = e^{1/x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$  (рис. 5.4, а);

4)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} f(x)$  не существует (рис. 5.4, б);

5)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x_0 = \pi/2$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2 \pm 0} f(x) = \mp \infty$ .

## 5.4. Производная и ее применение.

### Правила дифференцирования

1°. Производная функции характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента.

Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел (если он существует) отношения приращения функции  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  к приращению аргумента  $\Delta x$ , когда  $\Delta x$  стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной используются также символы  $df(x_0)/dx$  или  $df(x)/dx|_{x=x_0}$  (иногда  $Df(x_0)$ ). В данном определении производной предполагается, что функция определена в окрестности точки  $x_0$  и что может быть  $\Delta x > 0$  и  $\Delta x < 0$ , т. е. точка  $x_0 + \Delta x$  может приближаться к точке  $x_0$  как справа, так и слева.

Геометрический смысл производной:  $f'(x_0)$  равна тангенсу угла наклона  $\alpha$  касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  (рис. 5.8, а).

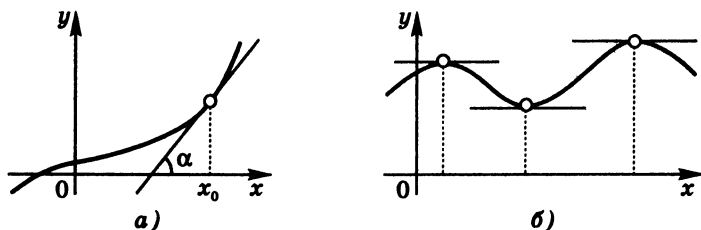


Рис. 5.8.

а — геометрический смысл производной;









б — в точках экстремума касательная горизонтальна

Физический смысл производной: если какая-либо величина  $\varphi$  зависит от времени  $t$ , т. е.  $\varphi = \varphi(t)$ , то скорость изменения этой величины в момент времени  $t_0$  равна производной  $\varphi'(t_0)$ . Например, если координата  $x$  точки зависит от времени:  $x = x(t)$ , то (мгновенная) скорость точки в момент  $t_0$  равна  $v_x(t_0) = x'(t_0)$ ; ускорение равно производной скорости:  $a_x(t_0) = v'_x(t_0)$ .



Таблица 5.1

**Исследование функции в окрестности критической точки**

Знак $f'(x)$		Изменение $f(x)$		Поведение функции
$x < x_0$	$x > x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$	
+	−			максимум
−	+			минимум
+	+			перегиб*
−	−			перегиб*

\*Или разрыв производной (неустранимый)

Функция, имеющая в точке производную, называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала  $(a, b)$ , называется дифференцируемой на этом интервале. Функция, дифференцируемая в точке  $x_0$ , непрерывна в этой точке. Однако не всякая непрерывная функция дифференцируема:  $y = \sqrt[3]{x}$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ , но производная в этой точке не существует.

2°. Значение производной зависит от точки, в которой она вычисляется, т. е. производную можно рассматривать как функцию от  $x$ :  $f'(x)$ . Производная от производной (если существует) называется второй производной или производной второго порядка от функции  $f(x)$ :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Аналогично определяются третья и четвертая производные:

$$f'''(x) = (f''(x))', \quad f^{IV}(x) = (f'''(x))'.$$

Для производных  $n$ -го порядка употребляются обозначения

$$f^{(n)}(x), \quad \text{или} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \text{или} \quad D^n f(x).$$

3°. Применение производной для исследования экстремумов (максимумов или минимумов) непрерывных функций основано на *теореме Ферма*: если функция  $f(x)$  в точке экстремума  $x_0$  имеет производную, то эта производная равна нулю:

$$f'(x_0) = 0. \quad (5.17)$$

Точка  $x_0$  называется точкой (локального) максимума функции  $f(x)$ , если в окрестности этой точки значения функции меньше, чем в самой этой точке:

$$f(x) < f(x_0) \quad \text{при } x \neq x_0.$$

Точка  $x_0$  — точка минимума  $f(x)$ , если в ее окрестности значения функции больше, чем в самой точке:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{при } x \neq x_0.$$

Геометрический смысл (5.17): касательная к графику функции в точке максимума или минимума горизонтальна (рис. 5.8, б).

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими*. Для нахождения экстремумов следует найти критические точки и исследовать знак производной в окрестности этих точек (табл. 5.1). Иногда удобно наличие экстремума в критической точке выяснить с помощью производной второго порядка: если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  — точка максимума  $f(x)$ ; если  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  — точка минимума  $f(x)$ .

4°. Точка  $x_*$  — *точка перегиба кривой*, если в окрестности точки  $x_*$  кривая при  $x < x_0$  расположена по одну сторону от касательной в точке  $x_*$ , а при  $x > x_0$  — по другую сторону (рис. 5.9). В точке перегиба изменяется направление выпуклости кривой. Перегибы графика функции называют перегибами функции.

Для нахождения точек перегиба следует найти точки, «подозрительные на перегиб»: в этих точках  $f''(x_0) = 0$  или не существует. Вопрос о наличии или отсутствии перегиба в точке  $x_*$  решается исследованием знаков  $f''(x)$  в окрестности точки  $x_*$  слева и справа от этой точки: если знаки одинаковые, перегиба нет; если знаки разные, имеется перегиб.

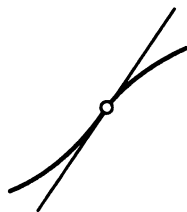


Рис. 5.9.  
Точка перегиба

## Пример

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3$  (п. 5°). Критические точки находятся из уравнения  $3x^2 - 3 = 0$ , откуда  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Далее,  $f''(x) = 6x$ . Так как  $f''(-1) = -6 < 0$ , то  $x_1$  — точка максимума,  $f''(1) = 6 > 0$ ,  $x_2$  — точка минимума. Точка  $x_3 = 0$  — подозрительная на перегиб; поскольку  $f''(x) < 0$  при  $x < 0$ ,  $f''(x) > 0$  при  $x > 0$ , то  $x_3$  есть точка перегиба. График функции изображен на рис. 5.10.

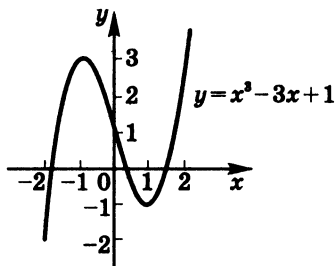


Рис. 5.10.  
График функции  
 $y = x^3 - 3x + 1$

5°. Дифференцирование, или вычисление производной, выполняется по следующим правилам:

- 1)  $C' = 0$  — производная постоянной равна нулю;
- 2)  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$  — производная суммы равна сумме производных;
- 3)  $(\gamma f(x))' = \gamma f'(x)$  — постоянный множитель выносится за знак производной;
- 4)  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  — при дифференцировании произведения сомножители дифференцируются по очереди;

$$5) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

$$\text{в частности, } \left( \frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x);$$

- 6)  $[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi) \cdot \varphi'(x)$  — «цепное правило» дифференцирования сложной функции.

В правилах 2) — 6) предполагается существование производных в правых частях равенств.

Производные от элементарных функций приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x$	$e^x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$C$	$0$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

## Примеры

$$\begin{aligned}
 1) \quad f(x) &= \sin \sqrt{3x+1}, \\
 f'(x) &= \cos \sqrt{3x+1} \cdot (\sqrt{3x+1})' = \\
 &= \frac{\cos \sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}} (3x+1)' = \frac{3 \cos \sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad f(x) &= x \ln x + \operatorname{arctg}(e^x/x), \\
 f'(x) &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+e^{2x}/x^2} \cdot \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \\
 &= \ln x + 1 + \frac{(x-1)e^x}{x^2 + e^{2x}}.
 \end{aligned}$$

Здесь, кроме таблицы производных, применялись правила

1) — 6).

## 5.5. Некоторые дифференциальные уравнения

1°. Уравнение, в которое входят производные искомой функции, называется *дифференциальным уравнением*. К дифференциальным уравнениям сводится большинство задач теоретической и математической физики, механики, электромагнитной теории, волновых процессов, теории управления, био-

логических процессов и т. д. Ниже рассматриваются только *обыкновенные* дифференциальные уравнения, т. е. уравнения для функции от одной переменной.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид  $F(x, y, y') = 0$ . Здесь  $F$  — заданная функция трех переменных  $x, y, y'$ ;  $x$  — независимая переменная;  $y = y(x)$  — искомая (неизвестная) функция от  $x$ ;  $y' = y'(x)$  — ее производная. Решением дифференциального уравнения называется функция  $y(x)$ , при подстановке которой в уравнение получается тождественно верное равенство:  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

## 2°. Простейшие дифференциальные уравнения.

### 1) $y' = 0$ .

Решение:  $y(x) = C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, т. е. при любом выборе числа  $C$  уравнение удовлетворяется. Например, если  $v(t)$  — скорость точки,  $t$  — время, то уравнение  $v' = 0$  имеет решение  $v(t) = C$ , т. е. движение происходит с постоянной скоростью.

### 2) $y' = g(x)$ , где $g(x)$ — заданная функция.

Решение:  $y(x) = \int g(x) dx + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная (§ 5.6). Например, если задана зависимость проекции скорости на ось  $x$  от времени  $v_x(t)$ , то координата  $x(t)$  находится как решение уравнения  $x'(t) = v_x(t)$ , т. е.

$$x(t) = \int v_x(t) dt + C$$

(о нахождении  $C$  см. в п. 3°).

### 3) $y' = ay$ , где $a$ — заданное постоянное число.

Решение:  $y(x) = Ce^{ax}$ , где  $C$  — произвольная постоянная. Физический смысл этого дифференциального уравнения: скорость изменения некоторой величины  $y(t)$  пропорциональна значению этой величины в данный момент времени  $t$ . Если

$a < 0$ , то с течением времени будет  $y(t) \rightarrow 0$  (затухающий процесс); если  $a > 0$ , то  $y(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  (лавинообразно нарастающий процесс).

4)  $y'' + \omega^2 y = 0$ , где  $\omega$  — постоянное число,  $\omega \neq 0$ . Это уравнение встречается в теории колебаний (п. Ф5.3.1°). Например, такой вид имеет уравнение малых колебаний маятника.

Решение:

$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x,$$

или  $y(x) = C e^{i\omega x} + D e^{-i\omega x}$ , или  $y(x) = E \sin(\omega x + \varphi)$ .

Здесь  $A, B; C, D; E, \varphi$  — произвольные постоянные.

5)  $y'' - a^2 y = 0$ , где  $a$  — постоянное число,  $a \neq 0$ .

Решение:

$$y(x) = A e^{ax} + B e^{-ax}, \quad \text{или} \quad y(x) = C \operatorname{ch} ax + D \operatorname{sh} ax,$$

где  $A, B; C, D$  — произвольные постоянные. Решения имеют монотонный характер (лавинообразный рост или затухание при возрастании  $x$ ).

6)  $y'' = 0$ . Решение:  $y(x) = Ax + B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

7)  $y'' + \omega_0^2 y = f_0 \cos \omega_1 x$ , где  $f_0, \omega_0, \omega_1$  — постоянные числа. Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами. В физике такое дифференциальное уравнение встречается в теории колебаний (§ Ф5), где принято независимую переменную обозначать  $t$  (время), искомую функцию  $x(t)$ , а производную вместо штриха обозначать точкой:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_1 t.$$

Это уравнение описывает вынужденные колебания осциллятора, имеющего собственную частоту  $\omega_0$ , под действием вынуждающей периодической гармонической силы, частота которой  $\omega_1$ . Данное уравнение не учитывает трение.

В зависимости от соотношения частот  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , характер решений оказывается различным.

а)  $\omega_1 \neq \omega_0$ , частота вынуждающей силы отлична от собственной частоты. Решение имеет общий вид

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Здесь первый член представляет собой одно из решений («частное решение») неоднородного дифференциального уравнения. Физический смысл этого частного решения: это частное решение описывает установившиеся вынужденные колебания, происходящие на частоте вынуждающей силы. Их амплитуда и фаза не зависят от начальных данных. Второй член представляет собой общее решение однородного уравнения (которое получается из исходного, если заменить  $f_0$  — нулем). Его физический смысл — собственные колебания на частоте  $\omega_0$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  этих колебаний — произвольные постоянные. Их значения определяются из начальных условий, т. е. выражаются через начальные смещения  $x(t_0)$  и скорость  $\dot{x}(t_0)$  при  $t = t_0$ .

б)  $\omega_1 = \omega_0$ , частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой. В этом случае имеет место резонанс (п. Ф5.4.2°). Решение имеет вид (в отсутствие трения!):

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t + A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Из этой формулы видно, что амплитуда неограниченно возрастает с течением времени. В реальности следует учитывать силу трения, как это и сделано в п. Ф5.4.1° и п. Ф5.4.2°. Оказывается, что благодаря трению амплитуда всегда ограничена, хотя и может принимать большие значения.

### 3°. Задачи для дифференциальных уравнений.

*Задача Коши:* для уравнения первого порядка, кроме самого уравнения  $F(x, y, y')$ , задано начальное условие  $y(x_0) = y_0$ ; для уравнения второго порядка задаются два начальных условия  $y(x_0) = y_0$  и  $y'(x_0) = y_1$  (здесь  $x_0$  — какая-либо точка на оси  $x$ ,  $y_0$  и  $y_1$  — заданные числа).

## Примеры

1) Уравнение радиоактивного распада:  $N'(t) = -\lambda N(t)$ ; постоянная  $\lambda$  характеризует скорость распада,  $N(t)$  — число радиоактивных ядер в момент  $t$ .

Пусть в момент времени  $t_0 = 0$  число радиоактивных ядер равно  $N_0$ . В момент времени  $t$  величина  $N(t) = Ce^{-\lambda t}$ ; постоянная  $C$  находится из условия  $N(0) = N_0$ :  $y_0 = Ce^0$ ,  $C = y_0$ . Ответ:  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$  (п. Ф7.6.2°).

2) Пусть движение материальной точки, масса которой  $m$ , совершается вдоль оси  $x$  под действием силы, проекция которой на ось  $x$  равна  $F$ . Согласно второму закону Ньютона (п. Ф2.2.1°), имеет место соотношение

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{m}F,$$

где  $x(t)$  — координата точки на оси  $x$  в момент времени  $t$ . Если сила  $F$  задана как функция  $t$  и  $x$ , то это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции  $x(t)$ .

Для однозначного задания движения точки следует дополнить дифференциальное уравнение начальными условиями, а именно — указать начальную координату  $x_0 = x(t_0)$  и начальную скорость  $v_0 = \dot{x}(t_0)$ . В частности, если  $F \equiv 0$ , то  $x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0)$ .

*Краевая задача:* для уравнения второго порядка, кроме самого уравнения  $F(x, y, y', y'')$ , заданы *краевые* (или *граничные*) условия на концах какого-либо промежутка  $[a, b]$ :  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , где  $A$  и  $B$  — заданные числа.

## Пример

Задача о форме равновесия однородной тяжелой цепи, концы которой закреплены на одинаковой высоте  $h$ , сводится к краевой задаче для уравнения  $y'' - a^2 y = 0$  с граничными условиями  $y(-b) = h$ ,  $y(b) = h$  (расстояние между точками закрепления равно  $2b$ ).



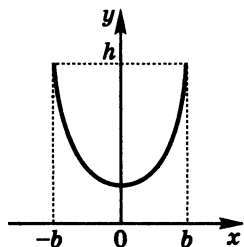


Рис. 5.11.

Цепная линия

Решение:

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} ax + C_2 \operatorname{sh} ax;$$

условия при  $x = \pm b$ :

$$h = C_1 \operatorname{ch}(-ab) + C_2 \operatorname{sh}(-ab),$$

$$h = C_1 \operatorname{ch} ab + C_2 \operatorname{sh} ab.$$

Так как

$$\operatorname{sh}(-\gamma) = -\operatorname{sh} \gamma, \quad \operatorname{ch}(-\gamma) = \operatorname{ch} \gamma$$

(п. 2.8.2°), то отсюда следует, что  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = \frac{h}{\operatorname{ch} ab}$ .

Ответ:  $y = h \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} ab}$ ; «провисание» цепи (рис. 5.11) составляет

$$\Delta h = h - y(0) = h \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} ab} \right).$$

## 5.6. Первообразная и неопределенный интеграл

1°. Часто бывает необходимо найти функцию, если известна ее производная. В связи с этим вводятся понятия первообразной и неопределенного интеграла.

Если на интервале  $(a, b)$  для двух функций  $f(x)$  и  $F(x)$  справедливо соотношение  $F'(x) = f(x)$ , то  $F(x)$  называется *первообразной функцией* для функции  $f(x)$ . Например, для  $\cos x$  первообразная равна  $\sin x$ , для  $\sqrt{x}$  первообразная равна  $(2/3)x^{3/2}$  (проверяется дифференцированием). Таким образом, нахождение первообразной — обратная операция по отношению к вычислению производной.

Любая непрерывная функция имеет первообразную. Первообразная всегда непрерывна. В данном параграфе предполагается непрерывность всех встречающихся функций.

Основные свойства первообразной:

1) если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , то при любой постоянной  $C$  функция  $F(x) + C$  также первообразная для  $f(x)$ ;

2) любые две первообразные  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  одной и той же функции отличаются на постоянную:

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

**2°.** Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  называется общее выражение  $F(x) + C$  всех первообразных этой функции. Здесь  $F(x)$  — какая-либо первообразная  $f(x)$ ,  $C$  — произвольная постоянная. Неопределенный интеграл обозначается символом  $\int f(x) dx$  (читается «интеграл от функции  $f(x)$ , дифференциал  $x$ » или «интеграл  $f(x)$  дэ икс»). По определению,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Функция  $f(x)$  называется *подынтегральной функцией*,  $x$  — *переменной интегрирования*. Неопределенные интегралы от элементарных функций приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Таблица неопределенных интегралов

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + C$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$
$e^x$	$e^x + C$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C \ (a > 0)$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$	$\ln  x + \sqrt{x^2 + b}  + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$		

Свойства неопределенного интеграла:

- 1)  $\int 0 dx = C$ ;
- 2)  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$  — интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций;
- 3)  $\int \gamma f(x) dx = \gamma \int f(x) dx$  — постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

При вычислении неопределенных интегралов бывают полезными:

1) формула интегрирования по частям

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx,$$

которую можно также записать в виде

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx, \quad (5.18)$$

где  $F(x)$  — какая-либо первообразная для  $f(x)$ ;

2) формула замены переменной интегрирования: если  $x = \varphi(t)$ , то

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (5.19)$$

### Примеры

1)  $\int x \ln x dx$ . Положим  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \ln x$ ; тогда  $F(x) = x^2/2$ ,  $g'(x) = 1/x$ . Используя (5.18), имеем  $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x = \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$ .

2)  $\int f(ax + b) dx$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные ( $a \neq 0$ ). Введем новую переменную интегрирования  $t = ax + b$ , тогда (см. формулу (5.19))  $x = \varphi(t) = (t - b)/a$ ,  $\varphi'(t) = 1/a$ . Таким образом,  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(t) dt$ . Например,  $\int \sin(3x + 7) dx = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C$ ,  $t = 3x + 7$ .

3)  $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C$ ,  $t = x^3$ .

Вообще говоря, интегрирование является гораздо более трудной задачей, чем дифференцирование. Производная от любой элементарной функции вычисляется в виде элементарной функции, в то время как интегралы только от некоторых

элементарных функций могут быть выражены в виде конечной комбинации элементарных функций.

Например,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  не выражается через элементарные функции.

## 5.7. Определенный интеграл и его приложения

1°. К понятию определенного интеграла естественно приходят при решении задачи о вычислении площади под графиком какой-либо функции. Разрежем фигуру  $ABCD$  на рис. 5.12,  $a$  на узкие полоски, каждую из них приближенно заменим на прямоугольник и подсчитаем сумму площадей прямоугольников — мы получим (приближенно) значение площади фигуры (§ 10.3).

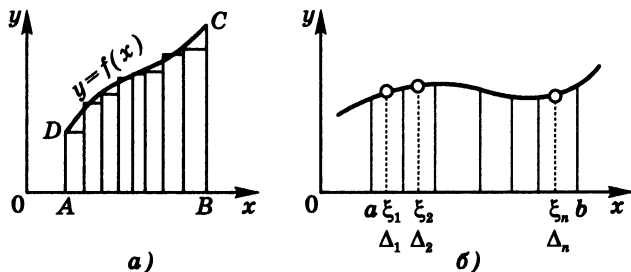


Рис. 5.12.

$a$  — площадь фигуры  $ABCD$  приближенно равна сумме площадей прямоугольников;

$б$  — к определению определенного интеграла

**Определение:** пусть на промежутке  $[a, b]$  задана функция  $f(x)$ . Разобьем промежутку  $[a, b]$  на  $n$  произвольных частей  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  (рис. 5.12,  $б$ ), на каждом частичном промежутке  $\Delta_i$  произвольно выберем точку  $\xi_i \in \Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и составим *интегральную сумму*  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i$  означает длину промежутка  $\Delta_i$ . Теперь число промежутков устремим к бесконечности таким образом, чтобы наибольшая длина промежутков стремилась к нулю:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Предел интегральной суммы при  $n \rightarrow \infty$  (если он существует) называется *определенным интегралом* на промежутке  $[a, b]$  от функции  $f(x)$ :

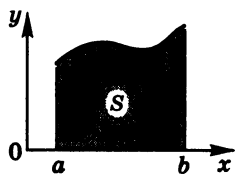
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В данном определении предполагается, что предел не зависит от способов разбиения  $[a, b]$  на части и от выбора точек  $\xi_i$  на  $\Delta_i$ .

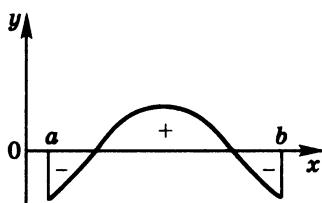
Символ  $\int_a^b f(x) dx$  читается «интеграл от  $a$  до  $b$  от функции  $f(x)$ , дифференциал  $x$ » (или просто «дэ икс»). Функцию  $f(x)$  называют *подынтегральной функцией*,  $x$  — *переменной интегрирования*,  $a$  — *нижним пределом*,  $b$  — *верхним пределом*,  $[a, b]$  — *промежутком интегрирования*.

Определенный интеграл от любой непрерывной функции существует. В дальнейших формулах все функции, стоящие под знаком интеграла, предполагаются непрерывными (или имеющими конечное число разрывов I рода).

Геометрический смысл определенного интеграла: если  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  численно равен площади *криволинейной трапеции* (рис. 5.13, а); если  $f(x)$  меняет знак на промежутке  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  равен «алгебраической сумме» площадей криволинейных трапеций (перед площадью ставится знак плюс для участка графика выше оси  $x$ , знак минус — для участка графика ниже оси  $x$ , см. рис. 5.13, б).



а)



б)

Рис. 5.13.

Определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции (а) или алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций (б)

Примеры применения определенного интеграла в физике:  
если  $f(x)$  означает проекцию силы на ось  $x$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

— работа силы при перемещении точки приложения силы вдоль оси  $x$  на  $[a, b]$ ;

если  $v_x(t)$  — проекция скорости как функция времени  $t$ , то

$$\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt = x_2 - x_1$$

— проекция перемещения за время от  $t_1$  до  $t_2$  (п. Ф2.1.1°).

**2°. Свойства определенных интегралов:**

$$1) \int_a^b 0 dx = 0, \quad \int_a^b 1 dx = b - a;$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0;$$

3)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  — интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций;

4)  $\int_a^b \gamma f(x) dx = \gamma \int_a^b f(x) dx$  — постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

5)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  — аддитивность интеграла относительно промежутка;

$$6) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Определенные интегралы вычисляются по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

где  $F(x)$  — какая-либо первообразная для  $f(x)$ . Символ  $F(x) \Big|_a^b$  читается «двойная подстановка  $F(x)$  от  $a$  до  $b$ » или «подстановка  $F(x)$  в пределах  $a$  и  $b$ ».

Некоторые определенные интегралы удается вычислить, минуя формулу Ньютона — Лейбница. Для этого применяются методы теории функций комплексного переменного, дифференцирование по параметру и прочие приемы (о приближенном вычислении интегралов см. в § 10.3).

Некоторые определенные интегралы приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

### Некоторые определенные интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2/4}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -C \approx -0,5772$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x dx = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} x dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(О символах  $n!$  и  $n!!$  см. в § 6.1;  $C$  — постоянная Эйлера.)

**3°. Несобственные интегралы от непрерывных функций по бесконечному промежутку.**

Определение:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (\text{иногда пишут } \int_a^{+\infty} f(x) dx).$$

Если конечный предел существует, говорят, что  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сходится, в противном случае — расходится.

Примеры

$$1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^0 - e^{-b}) = 1, \text{ интеграл}$$

сходится;

$$2) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 2) = \infty, \text{ интеграл}$$

расходится.

Геометрический смысл

$\int_a^{\infty} f(x) dx$  — площадь бесконечной криволинейной трапеции (рис. 5.14). Интеграл расходится, когда кривая  $y = f(x)$  недостаточно быстро приближается к оси  $x$  при  $x \rightarrow \infty$ . Если  $|f(x)| \leq M/x^{1+\varepsilon}$  при  $x \rightarrow \infty$ , интеграл сходится (здесь  $\varepsilon > 0$ ).



Рис. 5.14.

Фигура бесконечная, а ее площадь конечная

Несобственный интеграл по всей оси определяется аналогично:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$



Физический пример применения несобственного интеграла: работа электрического поля точечного заряда  $Q$  при перемещении точечного заряда  $q$  из данной точки  $r_0$  на бесконечность вычисляется как (п. Ф4.1.2°)

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

4°. Несобственные интегралы от разрывных функций: если  $a$  — точка разрыва функции  $f(x)$ , то несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  ( $a < b$ ) определяется как предел

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx.$$

Пример

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{c \rightarrow 0+0} \int_c^1 \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0+0} \left( x \ln x \Big|_c^1 - \int_c^1 x \cdot \frac{1}{x} dx \right) = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0+0} (-c \ln c - 1 + c) = -1 - \lim_{c \rightarrow 0+0} c \ln c = -1. \end{aligned}$$

В этом вычислении применена формула интегрирования по частям и предел  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = 0$  (п. 5.2.5°).

5°. *Некоторые приложения определенного интеграла.*

1) Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , где  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 5.15, а):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Например, площадь фигуры, заключенной между параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = -x$ , равна (рис. 5.15, б)

$$\int_{-1}^0 (-x - x^2) dx = - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

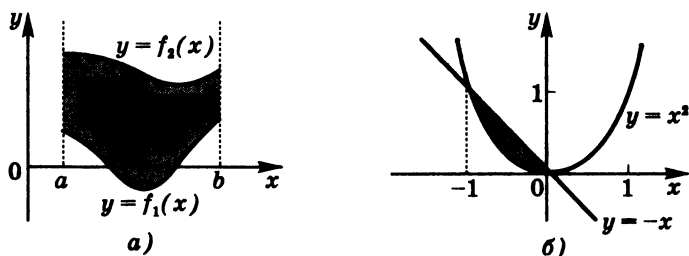


Рис. 5.15.

К вычислению площади плоской фигуры

2) Длина дуги плоской кривой  $y = f(x)$  при  $a \leq x \leq b$ :

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Например, длина дуги «цепной линии»

$$y = \frac{h \cdot \operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} ab}$$

(п. 5.5.3°) при  $ah = \operatorname{ch} ab$  равна

$$\int_{-b}^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 ax} dx = \int_{-b}^b \operatorname{ch} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax \Big|_{-b}^b = \frac{2}{a} \operatorname{sh} ab.$$

3) Объем тела, у которого известна зависимость от  $x$  площади поперечного сечения  $S(x)$  (рис. 5.16, а), равен

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

В частности, объем тела вращения вокруг оси  $x$  криволинейной трапеции  $0 \leq y \leq f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , равен

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Например, объем конуса (рис. 5.16, б), образованного вращением вокруг оси  $y$  треугольника с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0, h)$ ,  $(r, h)$ , равен

$$V = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h} y \right)^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

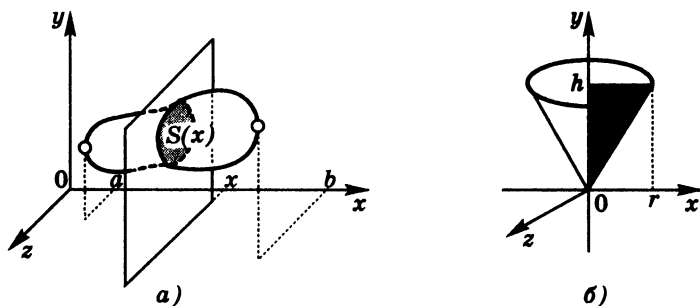


Рис. 5.16.

К вычислению объема тела

4) Площадь поверхности вращения вокруг оси  $x$  плоской кривой  $y = f(x)$  при  $a \leq x \leq b$  равна

$$F = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

## 5.8. Некоторые сведения о рядах

1°. Пусть дана бесконечная последовательность чисел  $\{x_n\}$ . Составим суммы вида  $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  — *частичные суммы*. Если существует (конечный) предел последовательности (§ 5.1) частичных сумм  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , то говорят, что *ряд*  $x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$  *сходится*; при этом число  $S$  называется *суммой ряда*. В этом случае пишут

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  не существует, то говорят, что *ряд расходится*.

## Примеры

1) Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия  $1 + q + q^2 + \dots$  (§ 5.1) сходится при  $|q| < 1$ ; ее сумма  $S = \frac{1}{1-q}$ .

2) Ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  (гармонический ряд) расходится, причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  сходится, то  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , т. е. общий член стремится к нулю. Обратное утверждение неверно: если  $x_n \rightarrow 0$ , ряд может быть расходящимся, например  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

**2°. Признаки сходимости рядов с положительными членами.**

1) *Признак сравнения*: если  $0 \leq a_n \leq b_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

## Пример

Ряд  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$  сходится, так как, во-первых,  $\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , а, во-вторых, ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$  сходится (геометрическая прогрессия).

*Примечание.*  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$  (п. 5.1.8°).

2) *Признак Даламбера*: пусть  $a_n > 0$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Если  $0 \leq q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится; если  $q > 1$ , ряд расходится.

## Пример

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ , здесь  $a_n = \frac{n}{2^n}$ ,  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ , ряд сходится.

3) *Интегральный признак Коши*: если  $f(x)$  — монотонно убывающая положительная непрерывная функция, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  и несобственный интеграл (п. 5.7.3°)  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  или оба сходятся, или оба расходятся.

### Примеры

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится, так как  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 1$ ;
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, так как  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$ .

3°. *Ряды с членами произвольных знаков*. Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , то говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *сходится абсолютно*. Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, говорят, что ряд *сходится неабсолютно (условно)*.

Например, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  сходится абсолютно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится неабсолютно.

Абсолютно сходящиеся ряды по своим свойствам напоминают обычные конечные суммы: члены абсолютно сходящегося ряда можно переставить в любом порядке, от этого сумма не изменится. Напротив, сумма неабсолютно сходящегося ряда зависит от порядка слагаемых: можно так переставить члены ряда, что его сумма будет равна любому наперед заданному числу (теорема Римана).

4°. *Функциональные ряды* — это ряды, члены которых являются функциями:

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

Простейшими функциональными рядами являются *степенные ряды*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - a)^n.$$

Свойства степенных рядов:

1) степенной ряд абсолютно сходится на *интервале сходимости*, т. е. при  $-R < x - a < R$ ; число  $R$  называется радиусом сходимости;

2) степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать:

если  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x-a)^n$ , то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n (x-a)^{n-1}, \quad \int S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

(эти операции можно применять к степенному ряду любое число раз).

В комплексной плоскости степенные ряды сходятся в *круге сходимости*, т. е. при  $|z - a| < R$ ,  $z \in \mathbb{C}$  (§ 7.1).

Важнейшие степенные ряды и их область сходимости (при  $x \in \mathbb{R}$ ):

1)  $-\infty < x < +\infty$ :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots;$$

2)  $-1 < x < 1$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} x^3 + \dots;$$

3)  $-1 < x \leq 1$ :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

## 6. КОМБИНАТОРИКА

*Комбинаторика* — раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и размещения (перенумерации) этих элементов в каком-либо порядке. Примеры комбинаторных задач: сколько различных четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр? Сколько различных составов команды по 11 игроков можно образовать из данных 15 игроков?

### 6.1. Перестановки. Размещения. Сочетания

1°. Пусть имеется  $n$  различных элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . *Перестановкой* из  $n$  элементов называется каждая последовательность этих элементов в каком-либо порядке. Например, 3, 1, 4, 2 и 4, 3, 1, 2 — две различные перестановки цифр 1, 2, 3, 4; СОРТ, РОСТ и СТОР — три различные перестановки букв О, Р, С, Т. Перестановки отличаются друг от друга порядком следования элементов.

2°. Число  $P_n$  всех перестановок данных  $n$  элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до  $n$ :  $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Такое произведение обозначается  $n!$  (читается « $n$  факториал»).

**Пример**

6 волейболистов можно разместить на площадке

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 \text{ способами.}$$

Дополнительно по определению полагают  $0! = 1! = 1$ . Имеет место рекуррентная формула

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

3°. Величина  $n!$  чрезвычайно быстро растет с ростом  $n$  (табл. 6.1). Для больших значений  $n$  (практически при  $n \geq 3$ )

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

(приближенная формула Стирлинга).

Таблица 6.1

## Значения факториала

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

4°. В некоторых формулах встречается символ  $n!!$  («полуфакториал»):

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k) && \text{для четного } n = 2k; \\ n!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) && \text{для нечетного } n = 2k-1. \end{aligned}$$

Справедливы формулы

$$(2k)!! = 2^k \cdot k!, \quad (2k-1)!! \cdot (2k)!! = (2k)!$$

5°. Пусть имеется  $n$  различных элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Требуется выбрать из них какие-нибудь  $m$  элементов и расположить эти  $m$  элементов в каком-либо порядке. Такие упорядоченные последовательности называются *размещениями* из  $n$  элементов по  $m$  элементов.

Примеры задач на размещения: 1) из 9 человек надо выбрать 4 человека и разместить их на 4 занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле); 2) 7 занумерованных шаров положить (по 1 шару в ящик) в какие-либо 7 из 20 занумерованных ящиков. В обеих задачах каждый способ выбора элементов и занятия мест является размещением.

Число размещений из  $n$  элементов по  $m$  обозначается  $A_n^m$  (читается « $A$  из  $n$  по  $m$ »). Справедлива формула

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1) \dots (n-m+1).$$

Например, решением первой задачи будет

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$$

6°. Пусть имеется  $n$  различных элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . *Сочетанием* из  $n$  элементов по  $m$  элементов называется каждое подмножество множества  $\{x_k\}$ , состоящее из  $m$  элементов (§ 2.1). Различные сочетания отличаются друг от друга только самими входящими в них элементами, порядок их



следования безразличен. Например, каждый состав команды по 11 участников из данных 15 спортсменов является сочетанием из 15 по 11.

Число сочетаний из  $n$  по  $m$  обозначается  $C_n^m$  (читается « $C$  из  $n$  по  $m$ »), иногда  $\binom{n}{m}$ . Имеют место формулы

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}.$$

Примеры

$$C_n^n = 1, \quad C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3, \quad C_{15}^{11} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

Для удобства записи некоторых формул по определению полагают  $C_n^0 = 1$  (свойства  $C_n^m$  см. в п. 6.2.2°).

## 6.2. Бином Ньютона

1°. *Бином Ньютона*, или натуральная степень бинома, есть выражение вида  $(a + b)^n$ , где  $n$  — натуральное число. Справедлива биномиальная формула

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (6.1)$$

где  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$  (п. 6.1.6°). В развернутом виде формула (6.1) имеет вид

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \quad (6.2)$$

Подставляя  $-b$  на место  $b$ , получаем

$$\begin{aligned} (a - b)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots + (-1)^n b^n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Формулы (6.1) — (6.3) для  $n = 2$  и  $n = 3$  приведены в § 1.1.

Пример

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

2°. Свойства биномиальных коэффициентов:

$$1) C_n^n = C_n^0, C_n^1 = n;$$

$$2) C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (симметрия);}$$

$$3) \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0;$$

$$4) C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k \text{ (рекуррентная формула);} \quad (6.4)$$

$$5) C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^p C_n^{k-p} + C_m^k C_n^0; \quad (6.5)$$

$$6) (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

(следствие формулы (6.5)).

3°. Схему последовательного вычисления биномиальных коэффициентов по формуле (6.4) удобно изобразить в виде *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

В каждой строке выписаны коэффициенты бинома степени соответственно нулевой, первой, второй и т. д. Каждый коэффициент (кроме крайних) получается как сумма двух ближайших к нему чисел в строке, лежащей над ним. Например,  $4 = 1 + 3$ ,  $6 = 3 + 3$  и т. д.

4°. С помощью биномиальных коэффициентов можно записать рекуррентную формулу для вычисления конечной суммы заданных  $m$ -х степеней первых  $n$  натуральных чисел. Обозначим эту сумму через  $X_m$ .

$$X_m = \sum_{k=1}^n k^m = 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m.$$

Формула для  $m = 1$  приведена в § 5.1:

$$X_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для  $m \geq 2$  справедлива рекуррентная формула

$$(m+1)X_m =$$

$$= n(n+1)^m - X_1 - C_m^1 X_2 - C_m^2 X_3 - \dots - C_m^{m-2} X_{m-1}. \quad (6.6)$$

Например, для  $m = 2$  из формулы (6.6) получаем

$$3X_2 = n(n+1)^2 - X_1,$$

или

$$X_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6.7)$$

Для  $m = 3$  из формулы (6.6) имеем

$$4X_3 = n(n+1)^3 - X_1 - C_3^1 X_2.$$

Используя формулу (6.7), можно окончательно записать

$$X_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \text{или} \quad X_3 = X_1^2.$$

В развернутом виде

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

## 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Исторически понятие комплексного числа появилось как расширение понятия действительного числа в связи с задачей решения алгебраических уравнений: в множестве действительных чисел некоторые алгебраические уравнения не имеют корней, в то время как в множестве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет корни. Это расширение понятия числа оказалось весьма плодотворным для решения разнообразных задач математики, физики, техники.

### 7.1. Общие положения

1°. *Комплексные числа* — это упорядоченные пары действительных чисел  $(a, b)$ , для которых введены определенные правила действий. Множество комплексных чисел обозначается  $\mathbb{C}$ .

Комплексное число  $z = (a, b)$  состоит из *действительной* (вещественной) *части*  $a = \operatorname{Re} z$  и *мнимой части*  $b = \operatorname{Im} z$ ; например,

$$\operatorname{Re}(3, -2) = 3, \quad \operatorname{Im}(3, -2) = -2.$$

Числа вида  $(a, 0)$  отождествляются с действительными числами:  $(a, 0) = a$ , поэтому понятие комплексного числа является расширением понятия действительного числа; в частности, число  $(0, 0)$  совпадает с действительным числом 0 и называется нулем. Числа вида  $(0, b)$  называются (чисто) *мнимыми*; в частности, число  $(0, 1)$  называется *мнимой единицей* и обозначается буквой  $i$  (иногда  $j$ ).

2°. Правила действий с комплексными числами:

1) равенство  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  равносильно системе двух равенств  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ , т. е. два комплексных числа равны тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части;

2)  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ , т. е. при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные и мнимые части; например,  $(3, -1) + (-2, 5) = (1, 4)$ ;

3) умножение:  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$  (§ 7.2); в частности,  $i^2 = i \cdot i = (-1, 0) = -1$ ;

4) вычитание и деление определяются как операции, обратные соответственно сложению и умножению; деление на нуль не определено.

Операции сложения и умножения обладают обычными свойствами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, см. п. 2.2.4°).

3°. Если  $z = (a, b)$ , то число  $(a, -b)$  называется *сопряженным* (комплексно сопряженным) для  $z$  и обозначается  $\bar{z}$  или  $z^*$ ; например,  $\overline{(2, 3)} = (2, -3)$ . Очевидно,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{z}} &= z, & z \cdot \bar{z} &= a^2 + b^2 \geq 0, \\ \operatorname{Re} z &= (z + \bar{z})/2, & \operatorname{Im} z &= (z - \bar{z})/2i, \\ \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.\end{aligned}$$

Неравенства  $>, \geq, <, \leq$  между комплексными числами не определены.

## 7.2. Алгебраическая форма

1°. Комплексное число  $z = (a, b)$  можно записать в так называемой *алгебраической форме*:

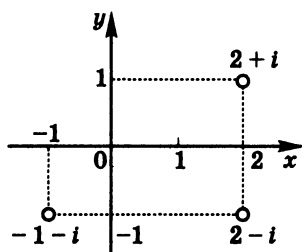


Рис. 7.1.

Комплексное число изображается точкой на плоскости

$$z = a + ib;$$

например,  $(-3, 4) = -3 + 4i$ . Сопряженное число запишется в виде

$$\bar{z} = a - ib.$$

Алгебраическая форма удобна тем, что все действия с комплексными числами выполняются как с двучленами (раскрытие скобок и т. д.), в которых после выполнения всех упрощений следует заменить

$i^2$  на  $-1$ . В частности, откуда сразу получается закон умножения комплексных чисел (§ 7.1):

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

### Примеры

$$1) i^3 = -i, i^4 = 1, i^{n+4} = i^n;$$

$$\begin{aligned}2) (-2 + 3i) \cdot 4 + (1 + i) \cdot (5 + 2i) &= \\ &= -8 + 12i + 5 + 5i + 2i + 2i^2 = -5 + 19i.\end{aligned}$$

2°. Деление комплексных чисел удобно выполнять с помощью умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю; например,

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-1+2i} &= \frac{(2+3i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \\ &= \frac{-2-3i-4i+6}{1^2+2^2} = \frac{4-7i}{5} = 0,8 - 1,4i.\end{aligned}$$

3°. Комплексное число  $z = x + iy$  изображается на плоскости точкой с координатами  $(x, y)$ , см. геометрическое изображение чисел  $(2+i)$ ,  $(2-i)$ ,  $(-1-i)$  на рис. 7.1. Ось абсцисс называется *действительной осью*, ось ординат — *мнимой осью*, плоскость называется *комплексной плоскостью*. Пара сопряженных чисел изображается точками, расположенными симметрично относительно действительной оси.

### 7.3. Тригонометрическая и показательная формы

1°. Комплексное число  $z = x + iy$  можно отождествить с вектором на плоскости  $xu$ , имеющим начало в точке 0 и проекции  $x$  и  $y$  (рис. 7.2). Правила сложения и вычитания комплексных чисел совпадают с соответствующими правилами для векторов (§ 8.1). Векторная интерпретация широко используется для изображения гармонических колебаний, переменных синусоидальных токов и напряжений (п. Ф4.5.4°, п. Ф5.4.2°).

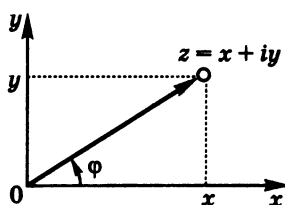


Рис. 7.2.

Комплексное число изображается вектором на плоскости

2°. *Модулем* комплексного числа называется длина соответствующего вектора:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

*Аргумент*  $\arg z = \varphi$  — угол (в радианах) между вектором и положительной полуосью  $x$  (положительное направление отсчета

угла — против часовой стрелки). Для каждого  $z \neq 0$  существует множество значений  $\varphi$ , отличающихся одно от другого слагаемыми вида  $2\pi k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Обычно используют *главное значение* аргумента:  $-\pi < \varphi \leq \pi$  (иногда  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Главное значение аргумента вычисляется по правилам, представленным в табл. 7.1, для действительных и чисто мнимых чисел — в табл. 7.2 ( $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ).

Модуль и аргумент комплексного числа совпадают с полярными координатами точки  $z$  на плоскости  $xy$  (п. 8.3.4°).

3°. Тригонометрическая форма:  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Таблица 7.1

### Формулы для аргумента комплексного числа





Квадрант	Знак $x, y$	Формула для аргумента
I 	$x > 0$ $y > 0$	$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho} = \arccos \frac{x}{\rho}$
II 	$x < 0$ $y > 0$	$\varphi = \arccos \frac{x}{\rho} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi = \pi - \arcsin \frac{y}{\rho}$
III 	$x < 0$ $y < 0$	$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi = -\arccos \frac{x}{\rho} = -\pi - \arcsin \frac{y}{\rho}$
IV 	$x > 0$ $y < 0$	$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho} = -\arccos \frac{x}{\rho}$

Таблица 7.2

### Аргументы действительных и чисто мнимых чисел

Знак $x, y$	Значение аргумента	Знак $x, y$	Значение аргумента
$x > 0, y = 0$	$\varphi = 0$	$x < 0, y = 0$	$\varphi = \pi$
$x = 0, y > 0$	$\varphi = \pi/2$	$x = 0, y < 0$	$\varphi = -\pi/2$

## Примеры

$$1) 1 + 0 \cdot i = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0);$$

$$2) i = 1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) 1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$4) -1 - i = \sqrt{3} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \\ = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right];$$

$$5) 3 + 4i = 5(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

## 4°. Показательная форма:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \text{или} \quad z = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{или} \quad z = \rho \exp(i\varphi),$$

где число  $e \approx 2,718$  (п. 5.1.8°). Например,  $e^{i\pi/2} = i$ ,  $e^{2i\pi k} = 1$ . Модуль числа вида  $e^{i\varphi}$  равен единице при любом действительном  $\varphi$ .

## 5°. Формулы Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Следствие:

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \sin(ix) = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \operatorname{sh} x,$$

где  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  — гиперболические функции (п. 2.8.2°).

Пример записи комплексного числа в различных формах:

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3}.$$



**6°.** Тригонометрическая и показательная формы особенно удобны в физических приложениях, а также при выполнении умножения и деления и при возведении в степень; например,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении модуль числителя делится на модуль знаменателя, а из аргумента числителя вычитается аргумент знаменателя.

Пример

$$3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot 4 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 12 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 12i,$$

или

$$3e^{i\pi/3} \cdot 4e^{i\pi/6} = 12e^{i\pi/2} = 12i.$$

Геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел:

1) при умножении комплексного числа  $z_1$  на положительное число  $p$  длина вектора, изображающего  $z_1$ , увеличивается в  $p$  раз;

2) при умножении на отрицательное число  $q$  длина вектора увеличивается в  $|q|$  раз, а направление меняется на противоположное;

3) при умножении  $z_1$  на комплексное число  $z_2$  длина вектора  $z_1$  увеличивается в  $|z_2|$  раз, а сам вектор поворачивается на угол  $\arg z_2$ .

Возведение в целую степень (*формула Муавра*):

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad z^n = \rho^n e^{in\varphi}.$$

Пример

$$(1 - i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{8i(-\pi/2)} = 16e^{-2\pi i} = 16.$$

Формулу Муавра можно использовать для вычисления тригонометрических функций кратных аргументов; например,

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \operatorname{Im} e^{2ix} = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^2 = \\ &= \operatorname{Im}(\cos^2 x + 2i \sin x \cos x - \sin^2 x) = 2 \sin x \cos x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \operatorname{Re} e^{3ix} = \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^3 = \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) = \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^5 C_5^k \cos^{5-k} x (i \sin x)^k = \\ &= C_5^1 \cos^4 x \sin x - C_5^3 \cos^2 x \sin^3 x + C_5^5 \sin^5 x = \\ &= 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x\end{aligned}$$

(бином Ньютона см. в п. 6.2.1°).

Формула Муавра полезна также при вычислении сумм вида

$$\sum_{k=0}^n q^k \cos kx \text{ и } \sum_{k=1}^n q^k \sin kx:$$

$$A = \sum_{k=0}^n q^k \cos kx = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n q^k e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n z^k,$$

где

$$z = qe^{ix}, \quad \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (\S 1.1),$$

$$\begin{aligned}A &= \operatorname{Re} \frac{1 - q^{n+1} e^{ix(n+1)}}{1 - qe^{ix}} = \operatorname{Re} \frac{(1 - q^{n+1} e^{ix(n+1)})(1 - qe^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} = \\ &= \frac{1}{1 - 2q \cos x + q^2} \operatorname{Re}(1 - q^{n+1} e^{ix(n+1)} - qe^{-ix} + q^{n+2} e^{inx}) = \\ &= \frac{1 - q \cos x - q^{n+1} \cos(n+1)x + q^{n+2} \cos nx}{1 - 2q \cos x + q^2}.\end{aligned}$$

7°. Корень  $m$ -й степени из нуля равен нулю. Возведение комплексного числа  $z \neq 0$  в степень  $1/m$ , где  $m$  — натуральное число (т. е. извлечение корня  $m$ -й степени), дает  $m$  различных значений:

$$z^{1/m} = \sqrt[m]{z} = \rho^{1/m} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{m} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{m} \right), \quad (7.1)$$

или

$$z^{1/m} = \sqrt[m]{z} = \rho^{1/m} \exp \frac{i(\varphi + 2\pi k)}{m}, \quad (7.2)$$

где  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ;  $\rho^{1/m} > 0$ . Если в формулах (7.1), (7.2)  $-\pi < \varphi \leq \pi$  и  $k = 0$ , то соответствующее значение корня называется главным значением.

Пример

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}e^{i(\pi+2\pi k)/3}$ , что дает три значения:

$$z_1 = 2e^{i\pi/3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

(главное значение),

$$z_2 = 2e^{i\pi} = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_3 = 2e^{5i\pi/3} = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

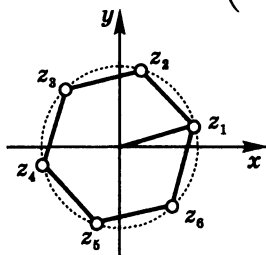


Рис. 7.3.

Корень степени  $m$  из комплексного числа имеет  $m$  различных значений

Корни  $m$ -й степени из комплексного числа  $z$  изображаются на комплексной плоскости точками  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , расположенными в вершинах правильного  $m$ -угольника на окружности радиуса  $\rho^{1/m}$  с центром в точке  $z = 0$  ( $m = 6$  на рис. 7.3). В частности, два значения квадратного корня отличаются знаком (множителем  $-1$ ); например,

$$\sqrt{1} = \pm 1, \quad \sqrt{-1} = \pm i, \quad \sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}.$$

### 7.4. Логарифмы комплексных чисел

Логарифм (натуральный) комплексного числа  $z \neq 0$  имеет бесконечное множество значений:

$$\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Здесь  $\ln \rho$  — обычный логарифм по основанию  $e$  (п. 5.1.8°), а  $\varphi = \arg z$ . Справедливо равенство  $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ .

#### Примеры

- 1)  $\operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + 2i\pi k = 2i\pi k$ ;
- 2)  $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k + 1)$ ;
- 3)  $\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(\pi/3 + 2\pi k)$ ;
- 4)  $\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi k) = i\pi(2k + 1/2)$ .

Главное значение логарифма:  $\ln z = \ln \rho + i\varphi$ , где  $-\pi < \varphi \leq \pi$ .

### 7.5. Комплексные корни уравнений

О решениях алгебраических уравнений в комплексной области см. § 3.4.

1°. Двучленное уравнение  $z^a = b$ , где  $z$  — неизвестное комплексное число,  $b$  — заданное комплексное,  $a = m/n$  — заданное рациональное действительное число, имеет (при  $b \neq 0$ )  $m$  решений:

$$z_k = |b|^{1/a} \exp \left[ \frac{i}{a}(\varphi + 2\pi k) \right], \quad (7.3)$$

где  $\varphi = \arg b$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Если  $a$  — действительное иррациональное число (§ 2.2), то решений бесконечно много и справедлива формула (7.3), но здесь  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

#### Примеры

- 1)  $z^{2/3} = 1 + i$ ,  $z_k = 2^{3/4} \exp \left[ \frac{3i}{2} \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right]$ ,  $k = 0, k = 1$ ;
- 2)  $z^\pi = 1 + i$ ,  
 $z_k = 2^{1/2\pi} \exp \left[ \frac{i}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) \right] = 2^{1/2\pi} \exp \left[ i \left( \frac{1}{4} + 2k \right) \right]$ ,  
 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2°. Уравнение  $\sin z = b$  имеет комплексные корни, если  $b$  комплексно или если  $b$  действительно, но  $|b| > 1$ . Для решения уравнения воспользуемся формулой Эйлера:

$$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$$

и обозначим  $\omega = e^{iz}$ ; тогда получим уравнение

$$\omega - \omega^{-1} = 2ib, \quad \text{или} \quad \omega^2 - 2ib\omega - 1 = 0,$$

откуда  $\omega_{1,2} = ib \pm \sqrt{1 - b^2}$ , где символ  $\sqrt{\phantom{x}}$  — какое-нибудь значение квадратного корня. Теперь  $z$  находится логарифмированием:

$$iz = \text{Ln } \omega, \quad z = -i[\ln |\omega| + i(\arg \omega + 2\pi k)], \quad (7.4)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Получились две бесконечные серии корней, соответствующие значениям  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_2$ .

### Пример

$\sin z = 2$ . В этом случае  $\omega_{1,2} = 2i \pm i\sqrt{3} = i(2 \pm \sqrt{3})$ ,  
 $\arg \omega_{1,2} = +\pi/2$ ,  $z = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + (\pi/2 + 2\pi k)$ .

3°. Уравнения  $\cos z = b$ ,  $\text{tg } z = b$  решаются в комплексной области аналогично.

## 8. ВЕКТОРЫ. КООРДИНАТЫ. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И СИММЕТРИИ

Векторы, векторные величины встречаются во многих разделах физики. Так, основные законы механики или электромагнитной теории наиболее удобно записываются в векторной форме. Для конкретных вычислений обычно переходят от векторных формул к соответствующим координатным формулам. Аппарат векторов и координат оказывается весьма полезным и в геометрии. Данная глава, кроме описания действий с векторами и систем координат, содержит также понятия и примеры симметрии и подобия фигур.

### 8.1. Векторы. Проекции

1°. Пара точек  $A$  и  $B$  задает вектор  $\overrightarrow{AB}$ , имеющий начало  $A$  и конец  $B$ . Вектор можно представить себе в виде направленного отрезка (рис. 8.1, а, вектор  $\overrightarrow{AB}$ , направление указано стрелкой). Если  $A = B$  (начало и конец вектора совпадают), то вектор  $\overrightarrow{AB}$  называется нулевым. Нулевой вектор изображается точкой, направление его не определено. Модулем (длиной или абсолютной величиной) вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$  (обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$ ).

Физические примеры векторных величин: перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс (п. Ф2.1.2°, Ф2.2.1°).

Два вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  считаются равными, если выполняются два условия:

1)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ , т. е. длины векторов равны;

2) направления лучей  $AB$  и  $CD$  одинаковы.

Например,  $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ , но  $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{A_3B_3}$ ,  $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{A_1B_4}$  (рис. 8.1, б).

Таким образом, каждому вектору  $\overrightarrow{AB}$  соответствует бесконечное множество равных ему векторов, получаемых из  $\overrightarrow{AB}$  всевозможными параллельными переносами. При таком определении векторы называются свободными, так как положение начальной точки не играет роли. В некоторых приложениях используют векторы с фиксированным началом, например радиус-вектор точки (п. Ф2.1.1°).

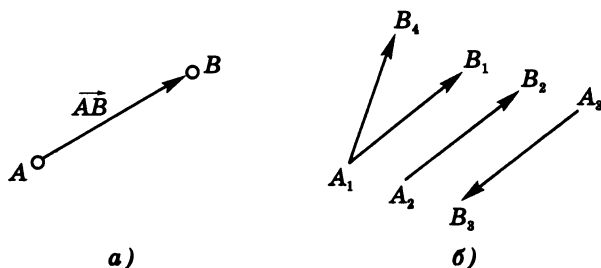


Рис. 8.1.  
Направленные отрезки

Векторы обычно обозначают одной буквой со стрелкой (или с чертой, или выделяют жирным шрифтом):  $\vec{a}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\mathbf{a}$ . Нулевой вектор обозначают  $\vec{0}$  или  $\mathbf{0}$ .

*Действия с векторами.*

1) Сумма  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  находится по правилу треугольника (рис. 8.2, а) или по правилу параллелограмма (рис. 8.2, б) — эти правила равносильны. Сложение векторов коммутативно и ассоциативно:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Правило треугольника удобно при сложении нескольких векторов (рис. 8.2, в). Отметим, что  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .

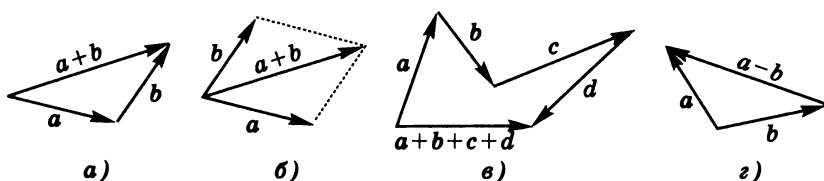


Рис. 8.2.

Сумма и разность векторов

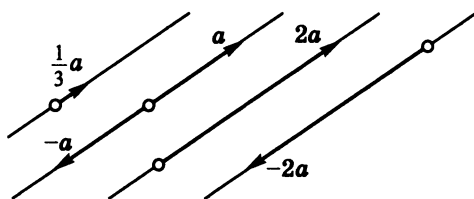


Рис. 8.3.

Коллинеарные векторы

Если  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , то  $\mathbf{b}$  называют вектором, противоположным  $\mathbf{a}$ , и обозначают  $-\mathbf{a}$ . Вектор  $-\mathbf{a}$  имеет ту же длину, что и  $\mathbf{a}$ , но противоположное направление. Разность векторов  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  можно определить как

сумму  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ , т. е. вычитание заменяется прибавлением противоположного вектора. Удобно также правило треугольника: векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  откладывают от общего начала, тогда разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  есть вектор, начало которого совпадает с концом  $\mathbf{b}$ , а конец — с концом  $\mathbf{a}$  (рис. 8.2, з).

2) Произведением вектора  $\mathbf{a}$  на действительное число  $\mu$  (обозначается  $\mu\mathbf{a}$  или  $\mathbf{a}\mu$ ) называется вектор, модуль которого равен  $|\mu| \cdot |\mathbf{a}|$ , а направление при  $\mu > 0$  совпадает с направлением  $\mathbf{a}$ , при  $\mu < 0$  противоположно направлению  $\mathbf{a}$ . Таким образом, умножение вектора на положительное число сводится к растяжению (сжатию) вектора, а умножение на отрицательное число — еще и к изменению направления на противоположное (рис. 8.3). Отметим, что

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

*Коллинеарные векторы* — векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 8.3). Коллинеарные векторы отличаются лишь числовым множителем. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

*Компланарные векторы* — три или более векторов, лежащих в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Любые три компланарных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  связаны зависимостью

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где хотя бы один из коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  отличен от нуля.

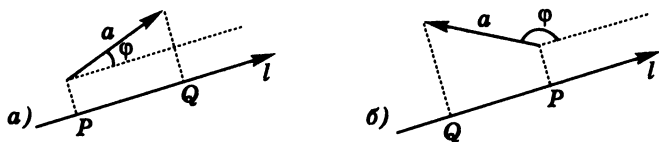


Рис. 8.4.

Проекция вектора на ось

2°. *Проекцией вектора на любую ось  $l$*  называется произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительной полуосью  $l$ :

$$(\mathbf{a})_l = |\mathbf{a}| \cos \varphi. \quad (8.1)$$

Ось  $l$  — это прямая, на которой выбрано положительное направление; каждая точка оси делит ее на положительную и отрицательную полуоси. Проекция вектора положительна, если угол  $\varphi$  острый (рис. 8.4, а), отрицательна, если угол тупой (рис. 8.4, б), и равна нулю, если угол прямой. Очевид-



но,  $(\mathbf{a})_l = \pm|PQ|$ , где  $P$  и  $Q$  — основания перпендикуляров, опущенных на ось из начала и конца вектора  $\mathbf{a}$ ; знак « $+$ » соответствует острому (тупому) углу  $\varphi$ .

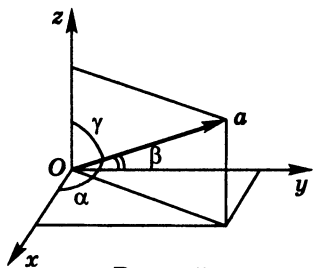


Рис. 8.5.

Вектор  $\mathbf{a}$  образует углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с осями координат

Координатами  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  вектора  $\mathbf{a}$  в прямоугольной системе координат  $xyz$  в пространстве (§ 8.3) называются его проекции на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$a_x = (\mathbf{a})_x = |\mathbf{a}| \cos \alpha,$$

$$a_y = (\mathbf{a})_y = |\mathbf{a}| \cos \beta,$$

$$a_z = (\mathbf{a})_z = |\mathbf{a}| \cos \gamma.$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы между вектором и соответствующими положительными полуосями (рис. 8.5). Вектор  $\mathbf{a}$  с координатами  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  записывают в виде  $\mathbf{a} (a_x, a_y, a_z)$ . Координаты вектора называют также его проекциями (на оси координат).

Проекции вектора  $\overrightarrow{AB}$ , заданного двумя точками  $A (x_1, y_1, z_1)$  и  $B (x_2, y_2, z_2)$ , равны разностям соответствующих координат точек (§ 8.3):

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB})_x &= x_2 - x_1; \\ (\overrightarrow{AB})_y &= y_2 - y_1; \\ (\overrightarrow{AB})_z &= z_2 - z_1. \end{aligned} \tag{8.2}$$

При сложении векторов их соответствующие проекции складываются, при умножении вектора на число — умножаются на это число:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})_x &= a_x + b_x, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})_y = a_y + b_y, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})_z = a_z + b_z, \\ (\mu \mathbf{a})_x &= \mu a_x, \quad (\mu \mathbf{a})_y = \mu a_y, \quad (\mu \mathbf{a})_z = \mu a_z. \end{aligned}$$

Модуль вектора  $\mathbf{a} (a_x, a_y, a_z)$  вычисляется по формуле

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{8.3}$$

В случае векторов на плоскости  $xy$  справедливы те же формулы, но отсутствует третья координата; например,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

**3°.** Любой вектор  $\mathbf{a}$  на плоскости может быть *разложен по ортам*  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  прямоугольной системы координат  $xy$  (§ 8.3):

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}.$$

В пространстве разложение по ортам  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  (§ 8.3) имеет вид

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (8.4)$$

Векторные слагаемые  $a_x \mathbf{i}$ ,  $a_y \mathbf{j}$ ,  $a_z \mathbf{k}$  называются составляющими, или компонентами вектора  $\mathbf{a}$  по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### Пример

Разложим по ортам вектор  $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a} (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{b} (-2, 1, 0)$ .

Решение:

$$\mathbf{c} = 3(\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) + 2(-2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (3 - 4)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

## 8.2. Скалярное и векторное произведения

**1°.** *Скалярное произведение*  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — это число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}}).$$

Скалярное произведение обозначается также  $\mathbf{ab}$  или  $(\mathbf{ab})$ , иногда  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Если угол между векторами острый (тупой), скалярное произведение положительно (отрицательно), если угол прямой — равно нулю. Скалярное произведение используется в физике, например при определении понятия работы (п. Ф2.4.5°).

Скалярное произведение выражается через проекции векторов по формуле

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

## Примеры

1)  $\mathbf{a} (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b} (0, 3, 4)$ ;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 2$  (угол острый);

2)  $\mathbf{a} (3, -2)$ ,  $\mathbf{b} (-1, 2)$ ;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3 - 4 = -7$  (угол тупой);

3)  $\mathbf{a} (2, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b} (-1, 1, -1)$ ;  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2 + 1 + 1 = 0$  (угол прямой).

Угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно вычислить по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

## Пример

$\mathbf{a} (3, -2)$ ,  $\mathbf{b} (-1, 2)$ ;

$$\cos \varphi = \frac{-7}{\sqrt{(3^2 + 2^2)(1^2 + 2^2)}} = -\frac{7}{\sqrt{65}} \approx -0,682,$$

откуда

$$\varphi = \arccos \left( -\frac{7}{\sqrt{65}} \right) \approx 2,62 \text{ рад} \approx 150^\circ.$$

**2°. Векторным произведением  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c}$ , определяемый следующим образом:**

1)  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}; \mathbf{b}})$ , т. е. модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на данных векторах;

2)  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ , т. е. вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат сомножители;

3) векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  образуют *правую тройку векторов*, т. е. кратчайший поворот вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  виден из конца вектора  $\mathbf{c}$  как поворот против часовой стрелки (правило буравчика, см. рис. 8.6, а).

Векторное произведение обозначается также  $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ , иногда  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

*Замечание.* Правую тройку образуют, например, большой, указательный и средний пальцы правой руки; при пользовании

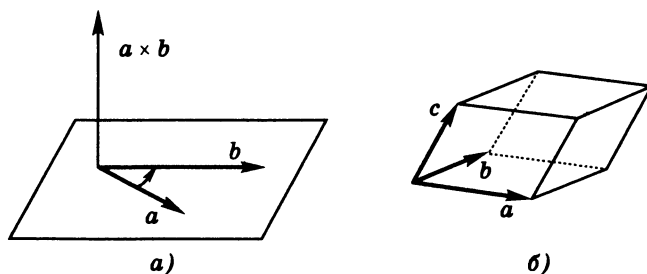


Рис. 8.6.

$a$  — векторное произведение векторов;  $b$  — параллелепипед

левой системой координат (п. 8.3.3°) в определении векторного произведения вместо правой берут левую тройку  $a, b, c$ .

Если  $a$  и  $b$  коллинеарны, то  $a \times b = 0$ .

Векторное произведение используется в физике, например при определении момента силы (п. Ф2.6.1°), силы Лоренца (п. Ф4.3.2°).

Свойства векторного произведения:

$$1) a \times a = 0;$$

2)  $a \times b = -b \times a$  (векторное произведение антикоммутативно);

$$3) (a + b) \times c = a \times c + b \times c, (\mu a) \times b = \mu(a \times b).$$

Координаты векторного произведения в прямоугольной системе координат (п. 8.3.3°):

$$\begin{aligned} (a \times b)_x &= a_y b_z - a_z b_y; \\ (a \times b)_y &= a_z b_x - a_x b_z; \\ (a \times b)_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Коротко векторное произведение записывается в виде определителя 3-го порядка:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Векторные произведения ортов  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned} i \times i &= j \times j = k \times k = 0, & i \times j &= -j \times i = k, \\ i \times k &= -k \times i = -j, & j \times k &= -k \times j = i. \end{aligned} \quad (8.6)$$

На практике векторное произведение удобно вычислять по формулам (8.5) либо записывать перемножаемые векторы в виде разложений по ортам (8.4), раскрывать скобки и пользоваться формулами (8.6).

### Пример

Найдем площадь треугольника с вершинами  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(-1, 1, 2)$ ,  $C(2, 3, 0)$ . Площадь треугольника  $S_{ABC}$  равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Координаты векторов вычисляются по формуле (8.2):  $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC}(1, 3, -1)$ . Площадь параллелограмма вычисляется как модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \\ &= -2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - 6(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \\ &\quad + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 2(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) - (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = -4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Модуль векторного произведения находится по формуле (8.3):

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{66}.$$

Ответ:  $S_{ABC} = \sqrt{66}/2$ .

Объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  (рис. 8.6, б), можно вычислить по формуле

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

## 8.3. Системы координат

1°. *Координатной осью* называется прямая линия, на которой отмечена точка  $O$  (*начало отсчета* или *начало координат*), выбран масштаб, т. е. указан отрезок единичной длины для измерения расстояний (*единичный* или *масштабный отрезок*), и задано положительное направление. На рис. 8.7, а на координатной оси  $x$  единичный отрезок обозначен  $OE$ , направление от точки  $O$  к точке  $E$  считается положительным (показано стрелкой). Начало координат  $O$  делит координатную ось на два луча: *положительную полуось* (которой принадлежит точка  $E$ ) и *отрицательную полуось*.

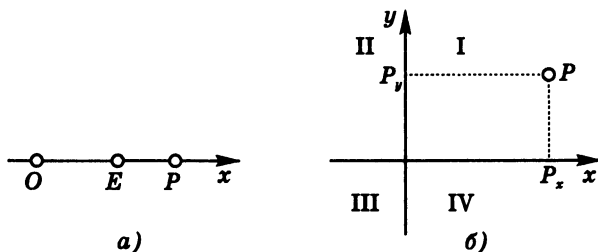


Рис. 8.7.

*a* — координатная ось; *б* — прямоугольная система координат

*Координатой* точки  $P$ , лежащей на оси  $x$ , называется число  $x = \pm|OP|$  (где  $|OP|$  означает длину отрезка  $OP$ ), причем знак «+» («−») соответствует расположению точки  $P$  на положительной (отрицательной) полуоси; если  $P = O$ , то  $x = 0$ . Расстояние между двумя точками  $P_1$  и  $P_2$  на оси  $x$  равно  $|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$ , т. е. оно равно модулю разности соответствующих координат.

*Орт* оси  $x$  — вектор  $\overrightarrow{OE}$ ; длина орта равна единице, направление совпадает с положительным направлением оси.

**2°. Прямоугольная (или декартова) система координат на плоскости** задается парой взаимно перпендикулярных координатных осей, имеющих общее начало в точке  $O$  и одинаковый масштаб (рис. 8.7, б). Оси координат на плоскости обычно обозначают  $x$  и  $y$  — оси *абсцисс* и *ординат* соответственно. Координатную плоскость обозначают  $xy$ .

Координатные оси разделяют плоскость  $xy$  на четыре *квadrанта* (или *четверти*): I, II, III, IV (рис. 8.7, б). Пусть точка  $P$  лежит на плоскости  $xy$ . Опустим из этой точки перпендикуляры на координатные оси; основания перпендикуляров обозначим  $P_x$  и  $P_y$  (рис. 8.7, б). Абсциссой точки  $P$  называется координата  $x$  точки  $P_x$  на оси  $x$ , ординатой — координата  $y$  точки  $P_y$  на оси  $y$ . Координаты точки, как правило, указывают в скобках рядом с обозначением точки:  $P(x, y)$ . Между точками на плоскости и парами их координат существует взаимно однозначное соответствие (п. 2.5.1°).

Расстояние между двумя точками  $P_1(x_1, y_1)$  и  $P_2(x_2, y_2)$  на плоскости определяется теоремой Пифагора (§ 9.2):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Орты осей  $x, y$  — единичные векторы  $i, j$  с началом в точке  $O$ .

**3°. Прямоугольная (или декартова) система координат** в пространстве задается тройкой попарно перпендикулярных координатных осей, имеющих общее начало в точке  $O$  и одинаковый масштаб. Оси координат в пространстве обычно обозначают  $x, y, z$ . Системы координат в пространстве возможны правые (рис. 8.8, а) и левые (рис. 8.8, б); на практике обычно пользуются правыми системами координат.

Орты осей  $x, y, z$  — единичные векторы  $i, j, k$  с началом в точке  $O$ ; направления ортов совпадают с направлением осей (рис. 8.8). Орты правой системы координат образуют правую тройку векторов (п. 8.2.2°), орты левой системы — левую тройку.

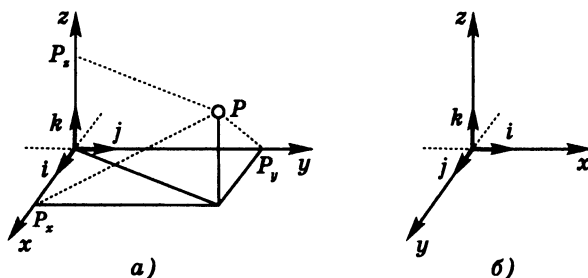


Рис. 8.8.

Системы прямоугольных координат в пространстве:

а — правая система; б — левая система

Координатные плоскости  $xy, yz, xz$  делят пространство на восемь октантов.

Координаты  $x, y, z$  точки  $P$  в пространстве определяются аналогично координатам на плоскости: это координаты (на соответствующих осях) оснований  $P_x, P_y, P_z$  перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на оси  $x, y, z$ . Координаты точки обычно указывают в скобках:  $P(x, y, z)$ . Между точками в пространстве и тройками их координат существует взаимно однозначное соответствие.

## Пример

Куб  $ABCD A'B'C'D'$  с длиной ребра  $d = 3$  вписан в I октант (в котором  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ ) так, что вершина  $A$  совпадает с началом координат, а грань  $ABCD$  вписана в I квадрант плоскости  $xy$  (рис. 8.9).

Координаты вершин куба:

$A(0, 0, 0)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $C(3, 3, 0)$ ,  $D(0, 3, 0)$ ,  
 $A'(0, 0, 3)$ ,  $B'(3, 0, 3)$ ,  $C'(3, 3, 3)$ ,  $D'(0, 3, 3)$ .

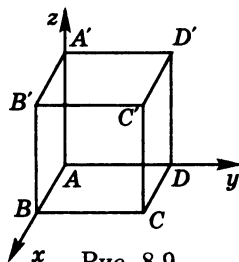


Рис. 8.9.

Куб вписан  
в I октант

Расстояние между двумя точками  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  в пространстве определяется теоремой Пифагора (п. 9.5.3°):

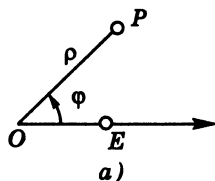
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

В частности, расстояние любой точки  $P(x, y, z)$  до начала координат равно

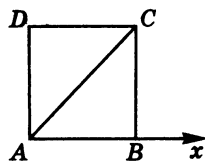
$$d_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4°. *Полярная система координат на плоскости* задается точкой  $O$  (полюсом) и полярной осью — лучом, выходящим из полюса (луч  $OE$  на рис. 8.10а).

На полярной оси выбран масштаб — единичный отрезок ( $OE$  на рис. 8.10а). Полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  точки  $P$ , лежащей на плоскости:  $\rho$  — расстояние от точки до полюса,  $\varphi$  — угол между полярной осью и отрезком  $OP$ .



а)



б)

Рис. 8.10.

Полярные координаты

Угол  $\varphi$  считается положительным (отрицательным), если он отсчитывается от полярной оси в направлении против часовой стрелки (по часовой стрелке). Если  $P = O$ , т. е. точка совпадает с полюсом, то  $\rho = 0$ , угол  $\varphi$  не определен. Если условиться считать, что  $0 < \varphi \leq \pi$  (или что  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ), то соответствие между точками на плоскости и парами их полярных координат взаимно однозначное, за исключением точки  $P = O$ .



### Пример

Вершины квадрата  $ABCD$  с длиной стороны  $d = 3$ , изображенного на рис. 8.10, б, имеют полярные координаты

$$A(0, \varphi_0), \quad B(3, 0), \quad C(3\sqrt{2}, \pi/4), \quad D(3, \pi/2),$$

где  $\varphi_0$  произвольно.

Поместим полюс полярной системы в начало прямоугольной системы координат, а полярную ось совместим с положительной полуосью оси  $x$ ; тогда связь прямоугольных и полярных координат задается формулами

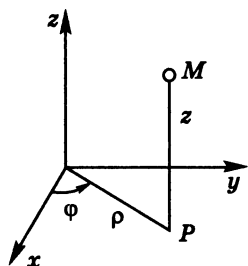


Рис. 8.11.

Цилиндрические  
координаты

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x,$$

$$\sin \varphi = y/\rho, \quad \cos \varphi = x/\rho.$$

Формулы, выражающие угол  $\varphi$  через  $x$  и  $y$ , см. в п. 7.3.2°.

Добавив к полярным координатам ось  $z$ , перпендикулярную плоскости  $xy$ , получаем *цилиндрические координаты*  $\rho, \varphi, z$  точки  $M(x, y, z)$  в пространстве (рис. 8.11).

## 8.4. Перемещение. Симметрия. Подобие

1°. *Перемещение* (движение) *плоскости* — такое взаимно однозначное преобразование точек плоскости, при котором сохраняются расстояния: если точка  $A$  переходит в  $A'$ ,  $B$  — в  $B'$ , то  $|A'B'| = |AB|$ . При перемещениях также сохраняются углы. Примеры перемещений плоскости: *параллельный перенос* (рис. 8.12, а), *поворот вокруг некоторой точки*  $O$  — центра поворота (рис. 8.12, б), *отражение относительно некоторой оси*  $l$  (*осевая симметрия*, см. рис. 8.12, в). Любое перемещение плоскости можно составить из этих трех типов перемещений. Говорят также о перемещениях фигур на плоскости. Две фигуры на плоскости считаются равными, если их можно совместить перемещением (рис. 8.12, все треугольники равны).

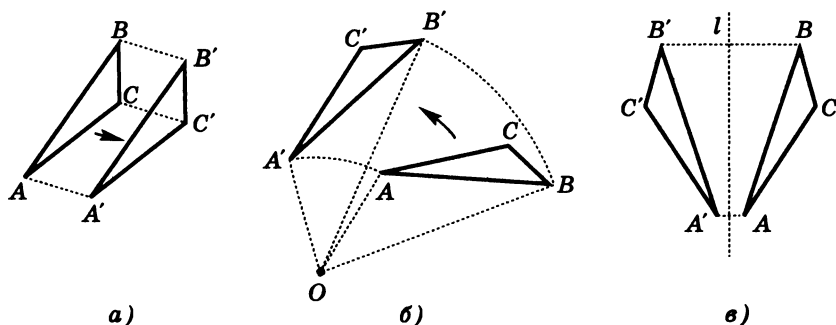


Рис. 8.12.

Перемещения на плоскости: *а* — параллельный перенос;  
*б* — поворот; *в* — отражение относительно оси

*Перемещение* (движение) *пространства* определяется аналогично: это взаимно однозначное преобразование точек пространства, при котором сохраняются расстояния. При этом углы также сохраняются, фигуры переходят в равные фигуры. Примеры перемещений пространства: *параллельный перенос* (рис. 8.13, *а*), *поворот вокруг* некоторой *оси* *l* (рис. 8.13, *б*), *отражение относительно* некоторой *плоскости* (зеркальное отражение, см. рис. 8.13, *в*). Параллельный перенос и поворот фигур в пространстве можно осуществить как реальное перемещение, отражение потребовало бы выхода из трехмерного пространства, поэтому никакими реальными перемещениями нельзя совместить, например, левую и правую перчатки, хотя они и считаются (в геометрии!) равными. (То же касается правых и левых троек векторов, см. п. 8.2.2°.)

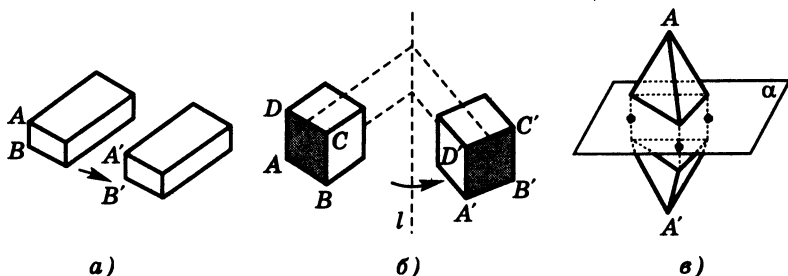


Рис. 8.13.

Перемещения в пространстве: *а* — параллельный перенос;  
*б* — поворот; *в* — отражение относительно плоскости

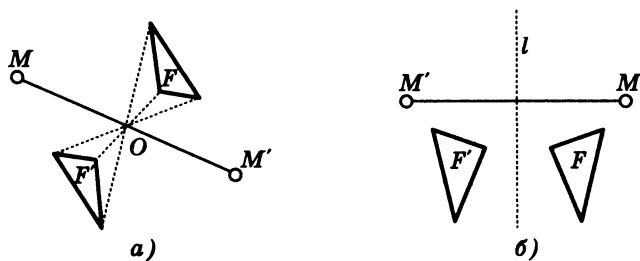


Рис. 8.14.

Точки  $M$ ,  $M'$  и фигуры  $F$ ,  $F'$  симметричны:

$a$  — относительно центра  $O$ ;  $b$  — относительно оси  $l$

2°. На плоскости или в пространстве точки  $M$  и  $M'$  называются *симметричными* (друг другу) *относительно центра*  $O$ , если точка  $O$  — середина отрезка  $MM'$  (рис. 8.14,  $a$ ). Точки  $M$  и  $M'$  называются *симметричными относительно оси*  $l$ , если  $l$  — серединный перпендикуляр (п. 9.2.2°) отрезка  $MM'$  (рис. 8.14,  $b$ ).

Фигура  $F$  *симметрична* фигуре  $F'$  *относительно центра* (относительно оси), если все точки  $F$  симметричны точкам  $F'$  относительно этого центра (относительно этой оси).

Говорят, что плоская фигура обладает *центральной симметрией* (фигура *центрально-симметрична*), если она симметрична сама себе относительно центра. Такая фигура совмещается сама с собой при повороте на  $180^\circ$  в плоскости вокруг центра. Примерами центрально-симметричных фигур могут служить круг, эллипс (§ 9.3), параллелограмм, звезды и правильные многоугольники с четным числом сторон, а также (приближенно) многие цветы (рис. 8.15).

Говорят, что плоская фигура обладает *осевой симметрией* (фигура *осесимметрична*), если она симметрична сама себе

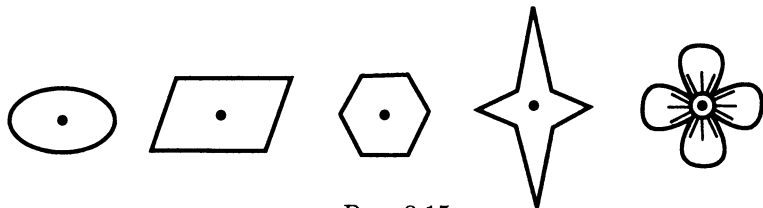


Рис. 8.15.

Центрально-симметричные фигуры

относительно оси, лежащей в плоскости фигуры. Такая фигура совмещается сама с собой при повороте плоскости (в пространстве) вокруг оси на  $180^\circ$ . Примерами осесимметричных фигур могут служить: равнобедренная трапеция (п. 9.2.12°), парабола (п. 2.2.6°, 9.3.4°), звезды и правильные многоугольники с нечетным числом сторон, а также (приблизительно) многие цветы и насекомые (рис. 8.16). Фигура может иметь оба вида симметрии: круг, эллипс, гипербола (§ 9.3), ромб и т. д.

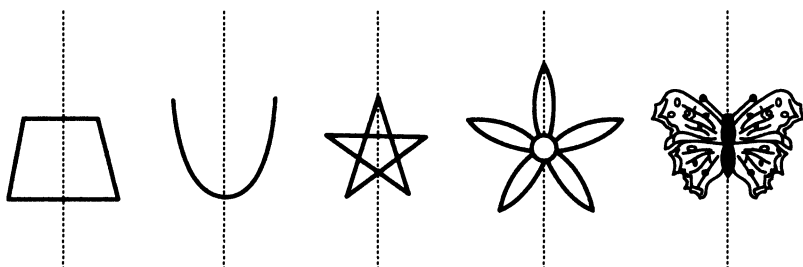


Рис. 8.16.  
Осесимметричные фигуры

3°. В пространстве рассматривается еще один вид симметрии: точки  $M$  и  $M'$  называются *симметричными относительно плоскости*, если отрезок  $MM'$  перпендикулярен этой плоскости и делится пополам в точке пересечения с ней (рис. 8.17). Можно сказать, что  $M'$  — зеркальное отражение точки  $M$  в плоскости симметрии.

Фигура  $F$  симметрична фигуре  $F'$  относительно плоскости (зеркально-симметрична), если все точки  $F$  симметричны точкам  $F'$  относительно этой плоскости (рис. 8.17). Фигура  $F$  обладает зеркальной симметрией, если она симметрична сама себе относительно плоскости. Примеры зеркально-симметричных фигур: шар,

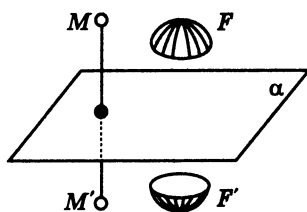


Рис. 8.17.  
Точки  $M$ ,  $M'$  и фигуры  $F$ ,  $F'$  симметричны относительно плоскости

куб, цилиндр, прямая призма (§ 9.5), а также (приблизительно) многие технические аппараты.

В некоторых специальных вопросах (в том числе в кристаллографии) рассматривается еще один вид пространственной симметрии — *осевая симметрия  $n$ -го порядка*. Говорят, что фигура обладает симметрией  $n$ -го порядка относительно оси, если она совмещается сама с собой при повороте вокруг этой оси на наименьший угол  $\varphi = 360^\circ/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Так, куб имеет симметрию 3-го порядка относительно каждой внутренней диагонали, симметрию 4-го порядка относительно прямой, проходящей через центры какой-либо пары противоположных граней, и симметрию 2-го порядка относительно прямой, проходящей через середины какой-либо пары противоположных ребер. Коротко говорят, что куб имеет оси 4-го порядка (три оси), 3-го порядка (четыре оси) и 2-го порядка (шесть осей). Снежинка имеет одну ось симметрии 6-го порядка. Любой кристалл (п. Ф3.6.1°) может иметь оси лишь 2-го, 3-го, 4-го, 6-го порядков — только такие осевые симметрии совместимы с трансляционной симметрией, т. е. пространственной периодичностью кристалла. Примеры плоских трансляционно-симметричных структур: паркет, обои.

4°. Преобразование подобия пространства — взаимно-однозначное преобразование точек пространства, при котором расстояния умножаются на одно и то же положительное число  $\gamma$  (*коэффициент подобия*):

$$|A'B'| = \gamma|AB|.$$

Преобразование подобия в общем случае состоит из перемещения и растяжения (сжатия), см. рис. 8.18. Фигуры  $F$  и  $F'$  называются *подобными*, если  $F'$  получается из  $F$  преобразованием подобия. Примеры подобных фигур: подобные треугольники (п. 9.2.4°), любые отрезки, окружности, квадраты, шары, правильные тетраэдры (§ 9.5), модели каких-либо сооружений или машин.

Линейные размеры подобных фигур  $F'$  и  $F$  относятся как  $\gamma : 1$ ; площади плоских фигур и площади поверхности пространственных фигур — как  $\gamma^2 : 1$ ; объемы пространственных фигур — как  $\gamma^3 : 1$ . Это обстоятельство при-

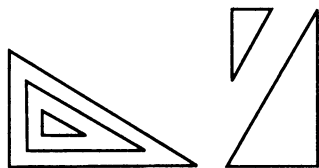


Рис. 8.18.

Подобные фигуры

водит к интересному явлению: геометрическое подобие тел не означает их физического подобия. Так, масса животного пропорциональна кубу линейных размеров, а прочность костей — квадрату; поэтому гигантские особи среди животных данного вида существовать не могут. Два стальных шарика различных диаметров, нагретые до одной и той же температуры, остывают на открытом воздухе с различной скоростью (маленький шарик быстрее большого), так как теплообмен с окружающей средой происходит через поверхность, а первоначальный запас внутренней энергии пропорционален объему. Крупные капли тумана оседают в воздухе быстрее маленьких, так как сила тяжести пропорциональна кубу линейных размеров, а сила сопротивления воздуха — первой степени (п. Ф2.9.3°).

## 9. ПЛАНИМЕТРИЯ И СТЕРЕОМЕТРИЯ

Изучение геометрических свойств разнообразных фигур на плоскости и в пространстве часто может быть сведено к изучению треугольников, из которых составлены эти фигуры. В данной главе рассматриваются углы, треугольники и многоугольники на плоскости, многогранники и тела вращения в пространстве, а также понятие кривизны гладкой поверхности.

### 9.1. Точки, прямые и углы на плоскости

1°. Прямая линия, лежащая на плоскости, разбивает эту плоскость на две *полуплоскости*. Произвольная точка  $O$ , лежащая на прямой, делит эту прямую на два *луча*, или *полу-*

*прямые*. Точка  $O$  — начало обоих лучей; говорят, что лучи исходят из начала. Лучи обозначаются двумя буквами, первая из которых обозначает начало, вторая — любую другую точку луча (например, лучи  $OA$  и  $OB$  на рис. 9.1).

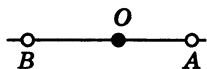


Рис. 9.1.

Точка  $O$  делит  
прямую на лучи  
 $OA$  и  $OB$

Через любые две точки на плоскости можно провести прямую и притом только одну. Две (различные) прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо *параллельны*, т. е. не имеют общих точек. Свойство параллельности прямых обозначается символом « $\parallel$ »; например,  $a \parallel b$ . Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой.

Уравнение прямой линии на плоскости в прямоугольной системе координат  $xy$  (п. 8.3.2°):

$$ax + by + c = 0,$$

где  $a, b, c$  — постоянные числа,  $x$  и  $y$  — координаты переменной точки  $M(x, y)$  на прямой. Вектор  $N(a, b)$  (§ 8.1) — «нормаль» к прямой: этот вектор перпендикулярен прямой. Если  $b \neq 0$ , уравнение прямой можно переписать в виде  $y = \alpha x + \beta$  (п. 2.6.1°).

2°. Две точки  $A$  и  $B$  на прямой ограничивают *отрезок*, обозначаемый  $AB$  или  $BA$ ; точки  $A$  и  $B$  — *концы* отрезка; длина отрезка  $AB$  обозначается  $|AB|$  или  $AB$ . Два отрезка считаются *равными*, если равны их длины. Перемещением (п. 8.4.1°) отрезка его можно совместить с любым равным ему отрезком.

Если точка  $O$  лежит на отрезке  $AB$  между точками  $A$  и  $B$ , то  $|AB| = |AO| + |OB|$  (рис. 9.1).

3°. Пара лучей, исходящих из общего начала, называется *углом*. *Стороны* угла — лучи, его образующие; *вершина* угла — общее начало его сторон. Угол, образованный лучами  $OA_1$  и  $OA_2$ , обозначается  $\angle A_1OA_2$  или  $\angle A_2OA_1$ , (рис. 9.2, а). В практических задачах целесообразно рассматривать угол как

меру поворота луча вокруг его начала до заданного положения (рис. 9.2, б). В геометрии углы считаются положительными.

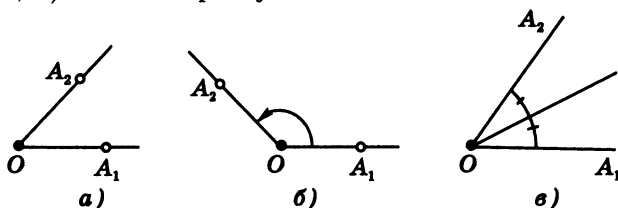


Рис. 9.2.

Угол как пара лучей (а) или как мера поворота луча (б)

Два угла считаются равными, если их можно совместить перемещением (п. 8.4.1°). *Биссектриса угла* — луч, исходящий из вершины угла и делящий угол пополам (рис. 9.2, в).

Если при повороте вокруг начала луч совершил один полный оборот до совпадения с первоначальным положением ( $A_2 = A_1$ ), то соответствующий угол называется *полным* (рис. 9.3, а); половина полного угла называется *развернутым* (рис. 9.3, б). Стороны развернутого угла лежат на одной прямой. Половина развернутого угла называется *прямым углом* (рис. 9.3, в).

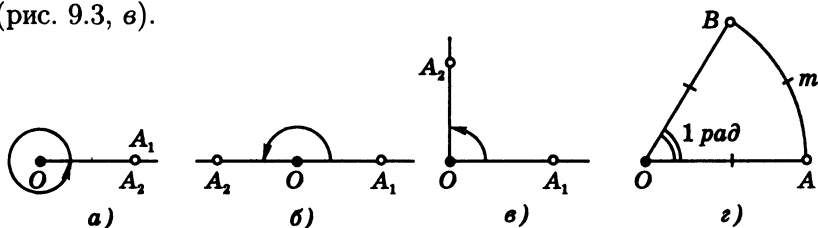


Рис. 9.3.

Углы: а — полный; б — развернутый; в — прямой; г — 1 рад

4°. *Градус* (обозначается «°») — это  $1/360$  часть полного угла. Прямой угол содержит  $90^\circ$ , развернутый —  $180^\circ$ , полный —  $360^\circ$ . Углы, меньшие  $90^\circ$ , называются *острыми* (рис. 9.2, а, в); больше  $90^\circ$ , но меньше  $180^\circ$  — *тупыми* (рис. 9.2, б). *Угловая минута* — это  $1/60$  часть градуса, *угловая секунда* — это  $1/60$  часть минуты. Запись  $57^\circ 17' 45''$  читается «57 градусов 17 минут 45 секунд». Углы можно измерять транспортиром; для более точных измерений пользуются гониометром, для геодезических измерений — теодолитом.



5°. *Радян* (рад) — это центральный угол (п. 9.3.1°), опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности (рис. 9.3, з). В градусной мере 1 рад приблизительно равен  $57^{\circ}17'45''$ . Прямой угол равен  $\pi/2$  рад, развернутый —  $\pi$  рад, полный —  $2\pi$  рад.

Если  $\alpha$  — значение угла в градусах,  $\beta$  — в радианах, то

$$\alpha = \beta \cdot 180^{\circ}/\pi, \text{ или } \beta = \alpha \cdot \pi/180^{\circ}.$$

Например, угол  $30^{\circ}$  имеет радианную меру  $\beta = 30^{\circ} \cdot \pi/180^{\circ} = \pi/6$ .

6°. Пусть две прямые пересекаются, при этом образуются четыре угла (рис. 9.4, а). Углы 1 и 2 (а также 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1) — *смежные*; углы 1 и 3 (а также 2 и 4) — *вертикальные*. Вертикальные углы равны; сумма смежных углов равна  $180^{\circ}$ .

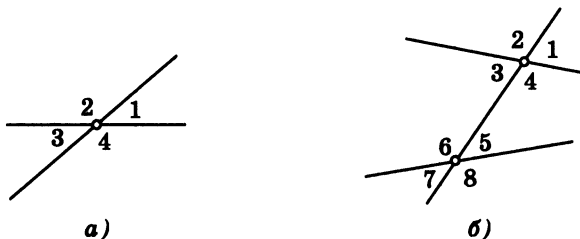


Рис. 9.4.

Углы: а — вертикальные (1 и 3, 2 и 4) и смежные (1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1); б — внутренние односторонние (4 и 5, 3 и 6) и внутренние накрест лежащие (4 и 6, 3 и 5)

Две прямые *перпендикулярны* (*ортогональны*), если, пересекаясь, они образуют прямые углы. Свойство перпендикулярности обозначают символом « $\perp$ »; например,  $a \perp b$ . Если обе стороны одного острого угла параллельны сторонам другого острого угла (либо обе стороны соответственно перпендикулярны), то эти углы равны.

7°. При пересечении двух прямых третьей прямой образуются восемь углов (рис. 9.4, б). Углы 4 и 5 (как и углы 3 и 6) называются *внутренними односторонними*; углы 4 и 6 (как и углы 3 и 5) — *внутренними накрест лежащими*.

**Признаки параллельности прямых.** Две прямые параллельны, если:

- 1) каждая из двух прямых параллельна третьей прямой;
- 2) две прямые пересечены третьей прямой и внутренние накрест лежащие углы равны;
- 3) две прямые пересечены третьей прямой и сумма внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ ;
- 4) каждая из двух прямых перпендикулярна третьей прямой.

8°. Пусть стороны угла с вершиной  $O$  пересечены несколькими параллельными прямыми  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Отрезки, которые эти прямые отсекают на сторонах угла, пропорциональны:

$$\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \dots = \frac{|A_{n-1}A_n|}{|B_{n-1}B_n|}$$

(рис. 9.5,  $n = 3$ ).

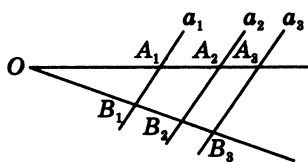


Рис. 9.5.

Параллельные прямые пересекают стороны угла

**Следствие:** если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (*теорема Фалеса*).

## 9.2. Треугольники. Многоугольники

1°. Пусть  $A, B, C$  — три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Фигура, состоящая из трех отрезков  $AB, BC, AC$ , называется *треугольником*  $ABC$  (обозначается  $\triangle ABC$ ). Иногда треугольником называют часть плоскости, ограниченную отрезками  $AB, BC, AC$ . Точки  $A, B, C$  — *вершины*, отрезки

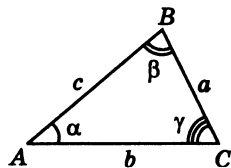


Рис. 9.6.

Углы и стороны треугольника

$AB, BC, AC$  — *стороны* треугольника (рис. 9.6). Углы  $CAB, ABC, BCA$  треугольника  $ABC$  часто обозначают одной буквой ( $A, B, C$  соответственно) или греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma$

(при этом внутри углов рисуют дуги, см. рис. 9.6). Говорят, что  $\angle A$  *противолежит* стороне  $BC$  или сторона  $BC$  *противолежит*  $\angle A$ ; так же  $\angle B$  и  $AC$ ,  $\angle C$  и  $AB$  противолежат (друг другу).

Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , или  $\pi$  рад:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Если один из углов треугольника прямой, треугольник *прямоугольный*; если один из углов тупой — *тупоугольный*; если все три угла острые — *остроугольный* (рис. 9.7). В любом треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против равных углов лежат равные стороны.

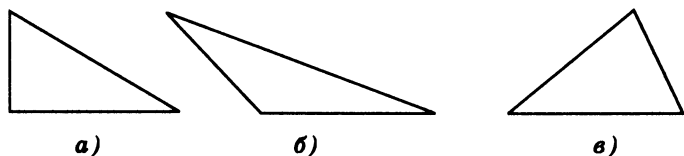


Рис. 9.7.

Прямоугольный (а), тупоугольный (б) и остроугольный (в) треугольники

2°. Пусть в  $\triangle ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $AB$ , луч  $CS$  делит  $\angle C$  пополам,  $CH \perp AB$ ,  $MP \perp AB$  (рис. 9.8, а). Тогда  $CM$  — *медиана* стороны  $AB$ ,  $CS$  — *биссектриса*  $\angle C$ ,  $CH$  — *высота* к стороне  $AB$ , прямая  $MP$  — *серединный перпендикуляр* к стороне  $AB$ . Две высоты тупоугольного треугольника лежат вне его:  $AF \perp BC$ ,  $BG \perp AC$  (рис. 9.8, б).

Свойства биссектрисы угла треугольника:

- 1) точки биссектрисы равноудалены от сторон угла;
- 2) биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$|AS|/|BS| = |AC|/|BC|.$$

Четыре замечательные точки в треугольнике:

- 1) три медианы пересекаются в одной точке (центр масс однородной треугольной пластины, см. п. Ф2.4.2°);

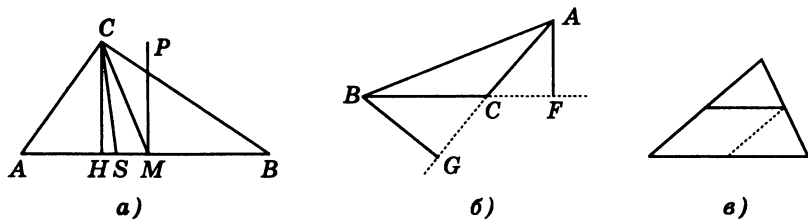


Рис. 9.8.

- а — некоторые элементы треугольника:  $CH$  — высота,  $CS$  — биссектриса,  $CM$  — медиана,  $MP$  — серединный перпендикуляр;  
 б — две высоты тупоугольного треугольника лежат вне его;  
 в — средняя линия треугольника

2) три биссектрисы пересекаются в одной точке (центр вписанной окружности, см. п. 9.3.1°);

3) три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке («ортоцентр»);

4) три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке (центр описанной окружности, см. п. 9.2.5°; центр масс однородного треугольного каркаса, см. п. Ф2.4.2°).

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

*Средняя линия* треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон, — параллельна третьей стороне и вдвое ее короче (рис. 9.8, в).

**3°.** Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить перемещением (п. 8.4.1°). Например,  $\triangle ABC$  на рис. 9.9 можно совместить с  $\triangle A_1B_1C_1$ , параллельным переносом, с  $\triangle AB_2C_2$  — поворотом, с  $\triangle ABC_3$  — преобразованием симметрии (отражением) относительно оси  $AB$ .

*Признаки равенства треугольников.* Два треугольника равны, если:

1) две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника (признак «по двум сторонам и углу между ними»);

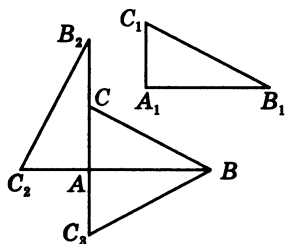


Рис. 9.9.

Равные треугольники  
можно совместить  
перемещением

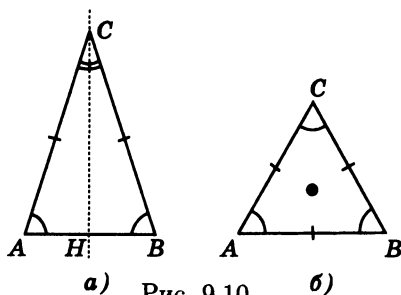
2) сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника (признак «по стороне и прилежащим к ней углам»);

3) три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника (признак «по трем сторонам»).

В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, две другие стороны — *катетами*.

Прямоугольные треугольники равны по двум *элементам* (кроме прямого угла):

- 1) по двум катетам;
- 2) по катету и гипотенузе;
- 3) по гипотенузе и острому углу;
- 4) по катету и прилежащему острому углу;
- 5) по катету и противолежащему острому углу.



а) Рис. 9.10.

Равнобедренный (а)

и равносторонний (б) треугольники

Треугольник, две стороны которого равны, называется *равнобедренным* ( $AC = BC$  на рис. 9.10, а). Третья сторона — *основание*, равные стороны — *боковые* стороны. Равнобедренный треугольник  $ABC$  симметричен относительно оси, проходящей через высоту  $CH$  к осно-

ванию. Отрезок  $CH$  — высота, медиана и биссектриса; он делит  $\triangle ABC$  на два равных прямоугольных треугольника.

У *равностороннего* (или *правильного*) треугольника все стороны равны, все углы равны  $60^\circ$  (рис. 9.10, б). Равносторон-

ний треугольник имеет ось симметрии 3-го порядка (п. 8.4.3°), перпендикулярную плоскости треугольника и проходящую через его центр (в центре совпадают все четыре замечательные точки).

4°. Два треугольника называются *подобными*, если преобразованием подобия (п. 8.4.4°) они переводятся друг в друга. Можно сказать, что подобные треугольники имеют одинаковую форму, но различные размеры. У подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны, а соответствующие углы равны (рис. 9.11):

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\angle B = \angle B_1,$$

$$\angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|}.$$

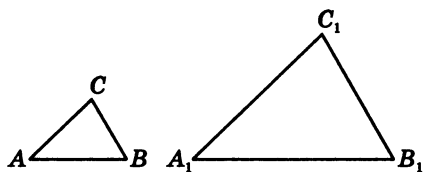


Рис. 9.11.

Подобные треугольники

Отношение сторон  $\gamma = |A_1B_1|/|AB|$  называется *коэффициентом подобия*. Коэффициент подобия характеризует растяжение плоскости, при котором  $\triangle ABC$  превращается в  $\triangle A_1B_1C_1$ . В подобных треугольниках отношение всех соответствующих линейных элементов (медиан, биссектрис, высот) равно  $\gamma$ , отношение площадей равно  $\gamma^2$ .

Признаки подобия треугольников: два треугольника подобны, если:

1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;

2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

5°. Любой элемент треугольника можно найти по нескольким заданным элементам. Обозначим  $S$  — площадь;  $a, b, c$  — стороны;  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы;  $p = (a + b + c)/2$  — полупериметр;  $R$  — радиус описанной окружности;  $r$  — радиус вписанной окружности;  $h_c$  — высота,  $m_c$  — медиана,  $l_c$  — биссектриса, проведенные из вершины  $C$ .

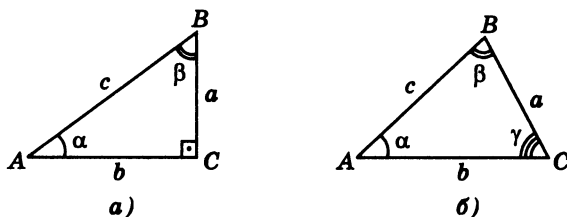


Рис. 9.12.

К решению треугольника:  $a$  — прямоугольного;  $b$  — произвольного

1) Прямоугольный треугольник (рис. 9.12, а,  $\gamma = 90^\circ$ ):

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Пифагора)}, \quad \alpha + \beta = 90^\circ,$$

$$a = c \sin \alpha = b \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha = \cos \beta, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta,$$

$$S = \frac{1}{2}ab, \quad r = \frac{ab}{a+b+c}, \quad h_c = \frac{ab}{c}, \quad R = m_c = \frac{1}{2}c, \quad l_c = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

2) Произвольный треугольник (рис. 9.12, б):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \text{ (теорема косинусов)},$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ (теорема синусов)},$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad S = rp,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона)},$$

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta, \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha},$$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

$$r = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

**6°.** Пусть на плоскости имеется конечная последовательность отрезков; у каждого отрезка один из концов назовем *началом* отрезка. Если начало второго отрезка совпадает с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д., то совокупность (объединение) этих отрезков называется *ломаной* (при этом предполагается, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой). Отрезки, составляющие ломаную, — *звенья*, концы отрезков — *вершины* ломаной (ломаная  $A_1A_2 \dots A_8$  на рис. 9.13, а). Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений; *замкнутой*, если конец последнего отрезка совпадает с началом первого отрезка (рис. 9.13, б).

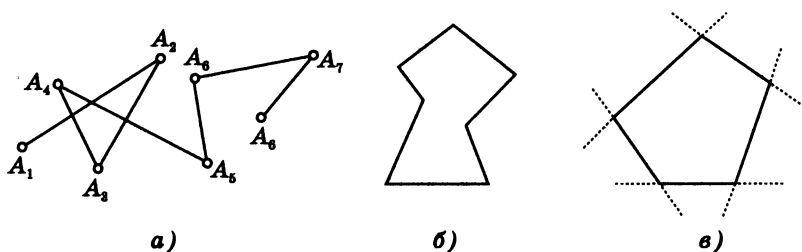


Рис. 9.13.

Ломаная (а), многоугольник (б) и выпуклый многоугольник (в)

*Многоугольник* — простая замкнутая ломаная. Звенья ломаной — *стороны*, вершины ломаной — *вершины многоугольника*. Многоугольник с  $n$  сторонами называется  $n$ -угольником. Иногда многоугольником называют часть плоскости, ограниченную простой замкнутой ломаной. *Периметр* многоугольника — сумма длин его сторон.

Многоугольник называется *выпуклым* (рис. 9.13, в), если он лежит по одну сторону относительно прямой, содержащей любую его сторону.

*Углы (внутренние)* многоугольника — это внутренние углы, образованные соседними сторонами. Число углов многоугольника равно числу сторон и числу вершин. Среди углов невыпуклого многоугольника имеется хотя бы один угол, больший  $180^\circ$ . Сумма углов  $n$ -угольника равна  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ , или  $(n - 2)\pi$ .



Многоугольник, описанный около окружности (окружность касается всех сторон многоугольника), — выпуклый; его площадь  $S = pr$ , где  $r$  — радиус окружности,  $p$  — полупериметр (полусумма всех сторон).

7°. Многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны. Любой правильный многоугольник — выпуклый. Примеры правильных многоугольников: правильный (или равносторонний) треугольник, квадрат, правильные пятиугольник, шестиугольник и т. д. Плоскость можно «замостить» правильными треугольниками, либо квадратами, либо шестиугольниками.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Справедливы формулы

$$R = \frac{a}{2 \sin(\pi/n)}, \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg}(\pi/n)},$$

где  $a$  — сторона,  $n$  — число сторон многоугольника,  $R$  — радиус описанной окружности,  $r$  — радиус вписанной окружности (*апофема* правильного многоугольника). Площадь правильного многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} nar = \frac{1}{2} na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

8°. *Параллелограмм* — четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 9.14, а). Кроме общих свойств выпуклых многоугольников, параллелограмм имеет следующие свойства:

- 1) противоположные стороны равны;
- 2) противоположные углы равны;
- 3) диагонали делятся пополам точкой пересечения;
- 4) точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма;
- 5) длины сторон и диагоналей связаны формулой

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

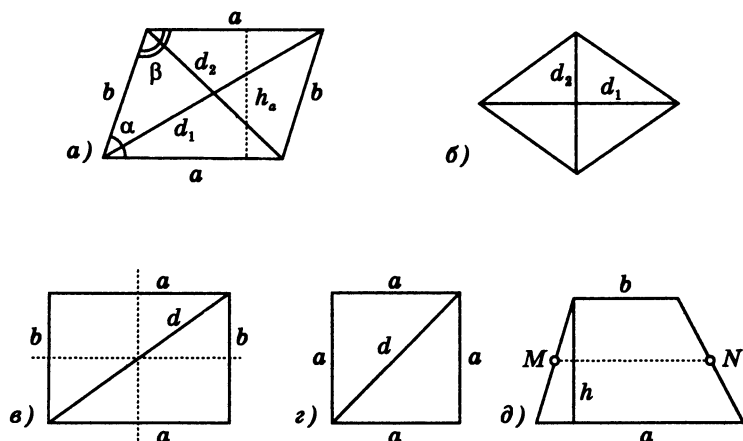


Рис. 9.14.

Параллелограмм (а), ромб (б), прямоугольник (в), квадрат (г) и трапеция (д)

Площадь параллелограмма (п. 8.2.2°):

$$S = ah_a = bh_b, \quad S = ab \sin \alpha = ab \sin \beta, \quad S = |a \times b|.$$

Признаки параллелограмма: четырехугольник является параллелограммом, если:

- 1) его противоположные стороны попарно равны;
- 2) его противоположные углы попарно равны;
- 3) две его противоположные стороны равны и параллельны;
- 4) его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

9°. Ромб — параллелограмм, все стороны которого равны (рис. 9.14, б). Кроме общих свойств параллелограмма, ромб имеет следующие свойства:

- 1) диагонали ромба перпендикулярны;
- 2) ромб симметричен относительно диагоналей;
- 3) диагонали ромба являются биссектрисами его углов;
- 4) площадь ромба выражается через диагонали:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

**10°. Прямоугольник** — параллелограмм, все углы которого прямые (рис. 9.14, в). Кроме общих свойств параллелограмма, прямоугольник имеет следующие свойства:

- 1) диагонали прямоугольника равны;
- 2) прямоугольник имеет две оси симметрии (рис. 9.14, в, штриховые линии);
- 3)  $S = ab$ ;
- 4)  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**11°. Квадрат** — прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 9.14, з). Имеет все свойства прямоугольника и ромба;

$$S = a^2, \quad d = a\sqrt{2}.$$

**12°. Трапеция** — четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны (рис. 9.14, д). Параллельные стороны называются *основаниями*, две другие стороны — *боковыми* сторонами. *Средняя линия* трапеции: отрезок  $MN$ , соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

Площадь трапеции:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h,$$

где  $a$  и  $b$  — основания,  $h$  — высота (рис. 9.14, д).

Трапеция называется *равнобедренной* или *равнобокой*, если ее боковые стороны равны. *Равнобокая* трапеция имеет ось симметрии — серединный перпендикуляр к основаниям.

### 9.3. Окружность, эллипс, гипербола, парабола.

#### Кривизна кривой

**1°. Окружность** — множество точек на плоскости, расположенных на одинаковом расстоянии от заданной на плоскости точки (*центра*). *Радиус* окружности — отрезок, соединяющий какую-либо точку окружности с центром. Часть плоскости,

ограниченную окружностью, называют *кругом* (рис. 9.15, а). Уравнение окружности, имеющей центр  $A_0(x_0, y_0)$  и радиус  $r$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Здесь  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты (п. 8.3.2°) переменной точки на окружности.

Прямая линия имеет с окружностью либо две общие точки, либо одну общую точку (точку *касания*), либо ни одной общей точки (рис. 9.15, б). Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется *касательной*. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания (рис. 9.15, в).

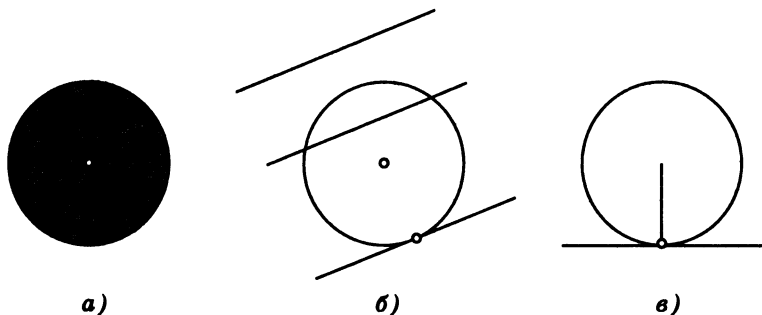


Рис. 9.15.

Круг (а), пересечение прямой линии и окружности (б) и касательная к окружности (в)

*Хорда* — отрезок, соединяющий две точки на окружности. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Диаметр — самая длинная хорда; диаметр состоит из двух радиусов.

*Дуга* — часть окружности, обозначается  $\smile AmB$  (рис. 9.16, а).

*Центральный* угол образован двумя радиусами (угол  $\alpha$  на рис. 9.16, а). *Вписанный* угол образован двумя хордами, общая точка которых — вершина угла — лежит на окружности (угол  $\beta$  на рис. 9.16, а). Центральный угол  $\alpha$  и вписанный угол  $\beta$  опираются на дугу  $AmB$ .

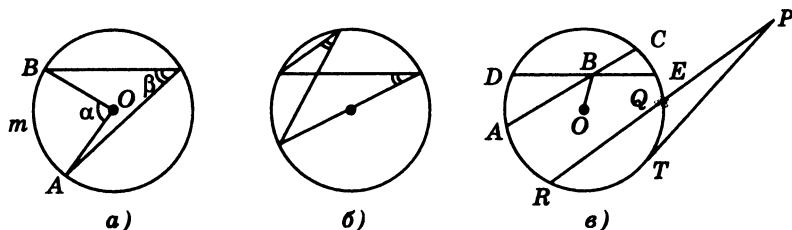


Рис. 9.16.

*a* — центральный угол вдвое больше вписанного; *б* — вписанные углы равны; *в* — секущая и касательная, две пересекающиеся хорды

*Теорема:* вписанный угол, опирающийся на ту же дугу, что и центральный угол, равен половине центрального угла:  $\beta = \alpha/2$ .

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 9.16, б). Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

*Следствие:* вписанный в окружность треугольник, одна из сторон которого — диаметр, является прямоугольным.

Свойство хорд, пересекающихся внутри окружности (рис. 9.16, в): произведения отрезков хорд равны, т. е.

$$|DB| \cdot |BE| = |AB| \cdot |BC| = r^2 - |OB|^2.$$

Свойство касательной и секущей (рис. 9.16, в):

$$|PQ| \cdot |PR| = |PT|^2.$$

Две касательные к окружности, проведенные из одной точки (вне окружности), симметричны относительно прямой, проходящей через центр и данную точку (рис. 9.17, а). Длина окружности и площадь круга:

$$l = 2\pi r = \pi d, \quad S = \pi r^2,$$

где  $\pi \approx 3,1415926536 \approx 3,14$ ,  $r$  — радиус,  $d$  — диаметр.

Дуга измеряется центральным углом, который на нее опирается:

$$l_\alpha = \alpha r,$$

где  $l_\alpha$  — длина дуги,  $\alpha$  — центральный угол (в радианах).

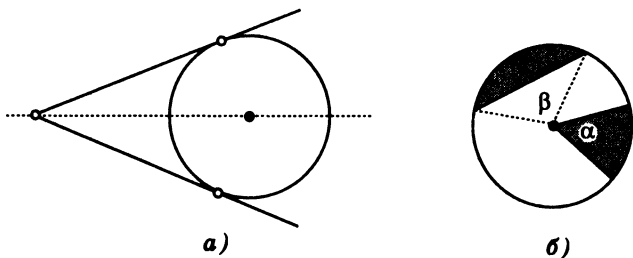


Рис. 9.17.

$a$  — две касательные к окружности;  $b$  — сектор и сегмент

*Сектор* — часть круга, ограниченная центральным углом и дугой, на которую он опирается (рис. 9.17, б). Площадь сектора ( $\alpha$  в радианах):

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha r^2.$$

*Сегмент* — часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой (рис. 9.17, б). Площадь сегмента ( $\beta$  в радианах):

$$S_{\text{сег}} = \frac{1}{2} r^2 (\beta - \sin \beta).$$

**2°. Эллипс** — множество точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек (*фокусов*) постоянна (рис. 9.18, а):

$$|F_1 M| + |F_2 M| = 2a.$$

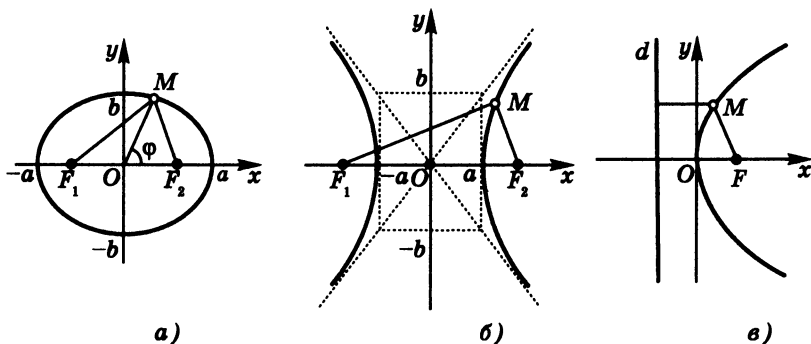


Рис. 9.18.

Эллипс (а), гипербола (б) и парабола (в)

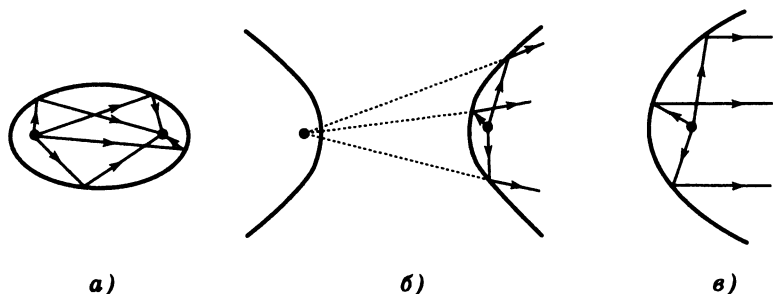


Рис. 9.19.

Оптические свойства эллиптического (а), гиперболического (б) и параболического (в) зеркал

Если ось  $x$  провести через фокусы, а начало прямоугольной системы координат поместить в середине отрезка  $F_1F_2$  (рис. 9.18, а), то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $x$  и  $y$  — координаты переменной точки эллипса,  $a$  — *большая*,  $b$  — *малая полуось*,  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ,  $2a = |F_1F_2|$  — расстояние между фокусами,  $c < a$ . Эллипс имеет две оси симметрии и центр симметрии.

Параметрические уравнения эллипса:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол полярной системы координат (п. 8.3.2°), полюс в центре эллипса,  $\varphi = \angle MOF_2$  (рис. 9.18, а, см. п. Ф2.1.1°).

Планеты движутся (приближенно) по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце (п. Ф2.5.1°). Оптическое свойство эллиптического зеркала: лучи света, исходящие из одного фокуса, после отражения от зеркала собираются в другом фокусе (рис. 9.19, а).

Площадь эллипса:

$$S = \pi ab.$$

**3°. Гипербола** — множество точек на плоскости, разность расстояний которых до двух заданных точек (*фокусов*) постоянна (рис. 9.18, б):

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a \quad (a > 0).$$

Гипербола состоит из двух бесконечных симметричных *ветвей*. Если ось  $x$  провести через фокусы, а начало прямоугольной системы координат поместить в середине отрезка  $F_1F_2$ , то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  — действительная,  $b$  — мнимая полуось,  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ,  $2c = |F_1F_2|$  — расстояние между фокусами,  $c > a$ .

Гипербола имеет две *асимптоты* — прямые  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , к которым неограниченно приближаются точки гиперболы при  $|x| \rightarrow \infty$ . Если  $a = b$ , гипербола называется *равнобочной*, при этом угол между асимптотами прямой. График обратной пропорциональной зависимости  $y = \frac{k}{x}$  (п. 2.7.2°) — равнобочная гипербола, асимптоты которой совпадают с осями  $x$  и  $y$ .

По гиперболам (приближенно) движутся многие небесные тела, например непериодические кометы (п. Ф2.5.1°). Оптическое свойство гиперболического зеркала: лучи света, исходящие из одного фокуса, после отражения от зеркала идут так, как будто они испущены мнимым источником, расположенным в другом фокусе (рис. 9.19, б).

**4°. Парабола** — множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки  $F$  (*фокуса*) и от заданной прямой  $d$  (*директрисы*), см. рис. 9.18, в. Если ось  $x$  провести через фокус перпендикулярно директрисе, а начало прямоугольной системы координат поместить на равных расстояниях от директрисы и от фокуса, то уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где  $p$  — расстояние от фокуса до директрисы. Ось  $x$  — ось симметрии параболы. Асимптот у параболы нет. Оптическое свой-



ство параболического зеркала: лучи света, исходящие из фокуса, после отражения от зеркала идут параллельно оси симметрии (рис. 9.19, в).

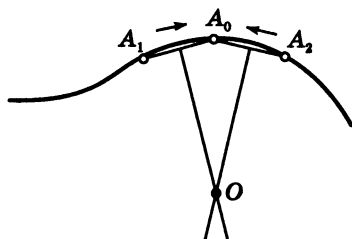


Рис. 9.20.

К определению центра  
и радиуса кривизны  
плоской кривой

5°. Пусть на плоскости имеется гладкая (без изломов) кривая (рис. 9.20). Возьмем на кривой три близкие точки  $A_1$ ,  $A_0$ ,  $A_2$  и проведем через них окружность (через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность и притом одну).

Центр этой окружности — точку  $O$  (рис. 9.20) можно най-

ти как точку пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам  $A_1A_0$  и  $A_0A_2$ . Будем приближать точки  $A_1$  и  $A_2$  к точке  $A_0$ ; предельное положение  $O_0$  точки  $O$  называется *центром кривизны* кривой в точке  $A_0$ , а предельное значение радиуса окружности — *радиусом кривизны* в точке  $A_0$ . Дуга окружности такого радиуса *аппроксимирует* кривую в окрестности точки  $A_0$ .

Если кривая задана на плоскости  $xy$  уравнением  $y = f(x)$ , то радиус кривизны в точке  $(x_0, y_0)$  равен  $R = 1/K$ , где  $K$  — *кривизна кривой*:

$$K = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + [f'(x_0)]^2\right)^{3/2}}.$$

#### 9.4. Точки, прямые и плоскости в пространстве

1°. Плоскость делит (разбивает) пространство на два *полупространства*. Две плоскости в пространстве либо *параллельны* (т. е. не имеют общих точек), либо пересекаются по прямой линии. Прямая линия либо *параллельна плоскости* (т. е. не имеет с ней общих точек), либо пересекает ее в одной точке, либо вся лежит в плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости: если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2°. Две прямые в пространстве либо *пересекаются* (имеют одну общую точку), либо *скрещиваются*, либо *параллельны* (рис. 9.21; прямые  $a$  и  $b$  пересекаются, прямые  $a$ ,  $c$  и  $d$  параллельны, прямые  $b$  и  $d$  скрещиваются). Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну; то же справедливо и для параллельных прямых. Через две скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость —

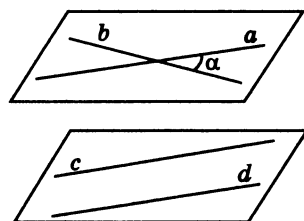


Рис. 9.21.

Прямые  $a$ ,  $c$ ,  $d$  параллельны,  $a$  и  $b$  пересекаются,  $b$  и  $d$  скрещиваются

скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях (рис. 9.21). Признак параллельности прямых: две прямые, каждая из которых параллельна третьей прямой, параллельны между собой.

3°. Всегда можно провести плоскость и притом только одну:

- 1) через три точки, не лежащие на одной прямой;
- 2) через прямую и точку, не лежащую на прямой;
- 3) через две параллельные прямые;
- 4) через две пересекающиеся прямые.

4°. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен, по определению, углу между двумя параллельными им пересекающимися прямыми (угол  $\alpha$  на рис. 9.21).

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* (ортогональной или нормальной) этой плоскости, если она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости (рис. 9.22, а). Если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым в плоскости, то эта прямая перпендикулярна плоскости. Пусть прямая пересекает плоскость в точке  $A$  и перпендикулярна плоскости; отрезок  $AB$  этой прямой (рис. 9.22, б) называется *перпендикуляром*, проведенным (или опущенным) к этой плоскости из точки  $B$ . Длина перпендикуляра  $AB$  называется *расстоянием* от точки  $B$  до плоскости.

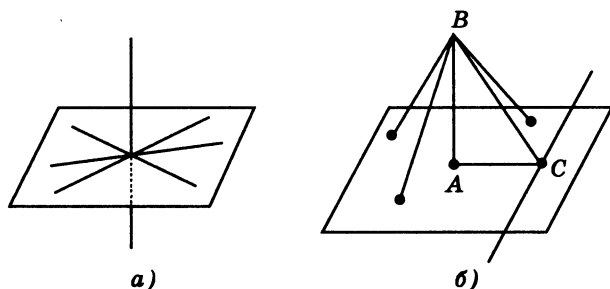


Рис. 9.22.

$a$  — перпендикуляр к плоскости;  $b$  — перпендикуляр, наклонные и проекция наклонной

Из произвольной точки вне плоскости можно опустить на плоскость один перпендикуляр и множество *наклонных* (рис. 9.22, б). Если  $AB$  — перпендикуляр,  $BC$  — наклонная, то  $AC$  — *проекция* наклонной на плоскость, точка  $C$  — *основание наклонной*, точка  $A$  — *основание перпендикуляра*. Угол между прямой и плоскостью определяется как угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

*Теорема о трех перпендикулярах*: прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, если она перпендикулярна проекции этой наклонной (рис. 9.22, б). Верно и обратное утверждение.

**5°.** Угол между двумя пересекающимися плоскостями — это угол между прямыми, по которым эти плоскости пересекаются с третьей плоскостью, перпендикулярной линии пересечения данных плоскостей (рис. 9.23, а). Для нахождения этого угла удобно взять произвольную точку на линии  $l$  пересечения данных плоскостей и провести из этой точки перпендикуляры к  $l$  в данных плоскостях (рис. 9.23, б). Плоскость, проведенная через прямую, перпендикулярную другой плоскости, перпендикулярна этой плоскости.

*Двугранный угол* — совокупность двух полуплоскостей, имеющих общую границу (*ребро* двугранного угла, см. рис. 9.23, б). Двугранные углы измеряются соответствующими углами между плоскостями. *Многогранный угол* образован несколькими плоскими углами, имеющими общую вершину (рис. 9.23, в, трехгранный угол  $B$ ).

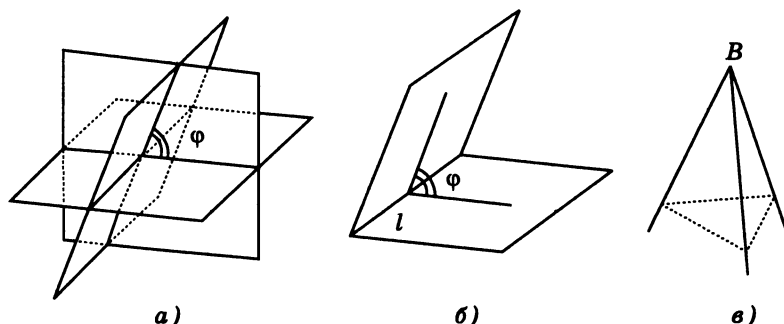


Рис. 9.23.

*a* — угол между двумя плоскостями; *b* — двугранный угол;  
*в* — трехгранный угол

**6°.** Проекцией на плоскость  $\alpha'$  плоской фигуры  $F$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ , называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из каждой точки фигуры  $F$  на плоскость  $\alpha'$  (рис. 9.24,  $F'$  — проекция  $F$ ). Проекция отрезка  $AB$  — отрезок  $A'B'$  (рис. 9.24). Площадь  $S$  многоугольника на плоскости  $\alpha$  и площадь  $S'$  его проекции на плоскость  $\alpha'$  связаны формулой

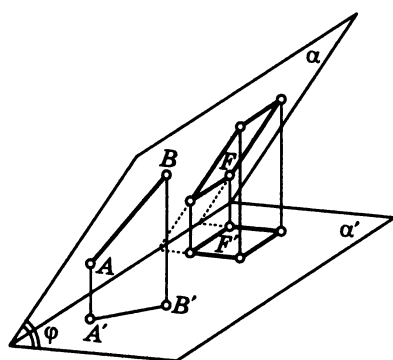


Рис. 9.24.

Проекция на плоскость  $\alpha'$  фигур, лежащих в плоскости  $\alpha$

$$S' = S \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\alpha'$ .

Эта формула справедлива для произвольной фигуры.

**7°.** Уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где  $x, y, z$  — прямоугольные координаты (п. 8.8.3°) переменной точки плоскости,  $A, B, C$  — постоянные числа. Тройка чисел  $(A, B, C)$  — координаты вектора  $N(A, B, C)$  — «нормали» к плоскости, этот вектор перпендикулярен плоскости.

### 9.5. Многогранники

1°. *Многогранная поверхность* — поверхность, образованная из плоских многоугольников (*граней* поверхности) так, что каждая сторона любого из этих многоугольников (*ребро* поверхности) является стороной еще одного многоугольника (*смежного* с первым), а от каждой грани можно перейти к любой другой, переходя последовательно по смежным граням. Вершины многоугольников называются *вершинами многогранной поверхности*. В каждой вершине сходится не менее трех ребер.

*Многогранник* — тело, ограниченное многогранной поверхностью. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости, содержащей любую его грань.

*Теорема Эйлера*: в выпуклом многограннике сумма числа граней  $G$  и числа вершин  $V$  на два больше числа ребер  $R$ :

$$G + V = R + 2.$$

2°. *Призма* — многогранник, две грани которого (*основания*) — равные  $n$ -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные  $n$  граней — параллелограммы (*боковые грани* на рис. 9.25, а). Стороны боковых граней, не лежащие на основаниях, называются *боковыми ребрами*. Призму можно представить себе как результат параллельного переноса основания вдоль некоторого отрезка (ребра).

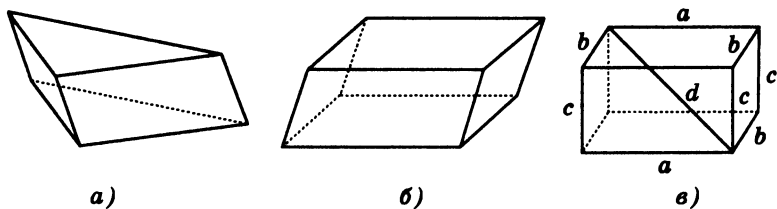


Рис. 9.25.

Призма (а), параллелепипед (б)  
и прямоугольный параллелепипед (в)

*Высотой* призмы называется расстояние между ее основаниями. Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H,$$

где  $S_{\text{осн.}}$  — площадь основания,  $H$  — высота призмы.

Боковые ребра *прямой* призмы перпендикулярны основаниям. У прямой призмы боковые грани — прямоугольники. Площадь боковой поверхности прямой призмы:

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H,$$

где  $P$  — периметр основания (сумма длин сторон основания). Призма *правильная*, если она прямая и ее основания — правильные многоугольники. Боковые грани правильной призмы — равные прямоугольники.

**3°. Параллелепипед** — призма, у которой основания — параллелограммы (рис. 9.25, б). Противоположные грани — равные параллелограммы. Все четыре (внутренние) диагонали пересекаются в одной точке (в центре симметрии) и делятся в ней пополам.

Все грани *прямоугольного* параллелепипеда — прямоугольники, все его ребра перпендикулярны соответствующим граням (рис. 9.25, в), все четыре (внутренние) диагонали равны.

*Теорема Пифагора для прямоугольного параллелепипеда:*

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Объем и площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда:

$$V = a \cdot b \cdot c, \quad S_{\text{полн.}} = 2(ab + ac + bc).$$

*Куб* — прямоугольный параллелепипед, все двенадцать ребер которого равны. Все шесть граней куба — равные квадраты. Диагональ куба  $d = a\sqrt{3}$ . Объем и площадь поверхности куба:

$$V = a^3, \quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

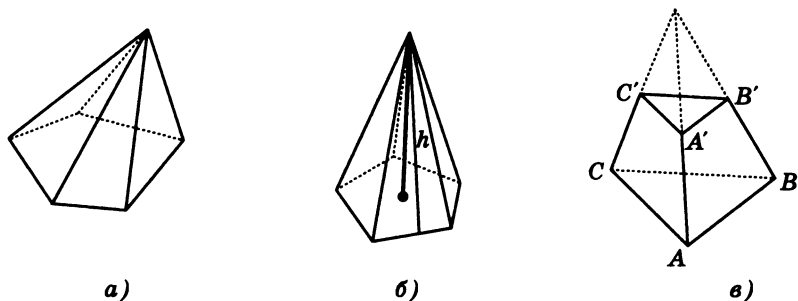


Рис. 9.26.

Пирамида (а), правильная пирамида (б) и усеченная пирамида (в)

4°. *Пирамидой* называется многогранник, одна из граней которого (*основание*) — многоугольник, остальные грани (*боковые грани*) — треугольники, имеющие одну общую вершину (*вершину* пирамиды, см. рис. 9.26, а). *Высота* пирамиды — расстояние от вершины до плоскости основания. Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H,$$

где  $S_{\text{осн.}}$  — площадь основания,  $H$  — высота.

Пирамида называется  $n$ -угольной, если основание ее —  $n$ -угольник. Пирамида *правильная*, если ее основание — правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания (рис. 9.26, б). Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Правильная  $n$ -угольная пирамида имеет ось симметрии порядка  $n$  (п. 8.4.3°). Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h,$$

где  $P$  — периметр основания,  $h$  — высота боковой грани (*апофема правильной пирамиды*).

5°. *Усеченная пирамида* получается из пирамиды отсечением от нее верхней части плоскостью, параллельной основанию (фигура  $ABCA'B'C'$  на рис. 9.26, в). Основания усеченной

Таблица 9.1

## Правильные многогранники

Название	Число граней и форма	Число ребер	Число вершин
Тетраэдр	4 треугольника	6	4
Куб	6 квадратов	12	8
Октаэдр	8 треугольников	12	6
Додекаэдр	12 пятиугольников	30	20
Икосаэдр	20 треугольников	30	12

пирамиды — подобные многоугольники, *боковые грани* — трапеции. *Высота* усеченной пирамиды — расстояния между основаниями. Объем усеченной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3}HS(1 + \gamma + \gamma^2),$$

где  $\gamma = |A'B'|/|AB|$  — коэффициент подобия оснований,  $S$  и  $S'$  — площади оснований  $ABC$  и  $A'B'C'$ ,  $H$  — высота.

Основания *правильной*  $n$ -угольной усеченной пирамиды — правильные  $n$ -угольники. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды:

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P + P') \cdot h,$$

где  $P$  и  $P'$  — периметры оснований,  $h$  — высота боковой грани (*апофема* правильной усеченной пирамиды).

**6°. Правильный многогранник** — выпуклый многогранник, все грани которого — равные правильные многоугольники и все многогранные углы которого равны. Существует всего пять правильных многогранников (рис. 9.27, табл. 9.1).

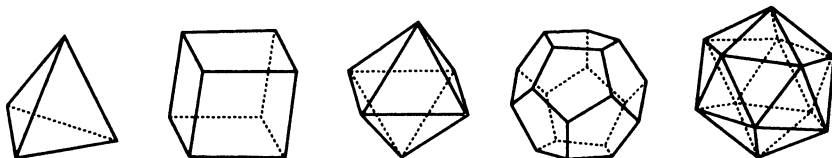


Рис. 9.27.

Правильные многогранники



## 9.6. Тела вращения

1°. *Поверхность вращения* — поверхность в пространстве, образованная плоской кривой при вращении плоскости, содержащей эту кривую, вокруг некоторой оси, лежащей в этой плоскости.

2°. *Цилиндр* (прямой круговой) — тело, ограниченное поверхностью вращения прямоугольника вокруг прямой, проходящей через середины противоположных сторон (рис. 9.28, а). Поверхность цилиндра состоит из двух кругов — *оснований* и *боковой поверхности*. Плоскости оснований параллельны, расстояние между ними — *высота* цилиндра. *Ось* цилиндра — прямая, проходящая через центры оснований, это ось симметрии бесконечного порядка (п. 8.4.3°). Боковая поверхность состоит из *образующих* — равных отрезков, параллельных оси. Боковую поверхность можно развернуть на плоскость — получится прямоугольник.

Объем, площади боковой и полной поверхностей цилиндра:

$$V = \pi R^2 H, \quad S_{\text{бок.}} = 2\pi RH, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

где  $R$  — радиус оснований,  $H$  — высота цилиндра.

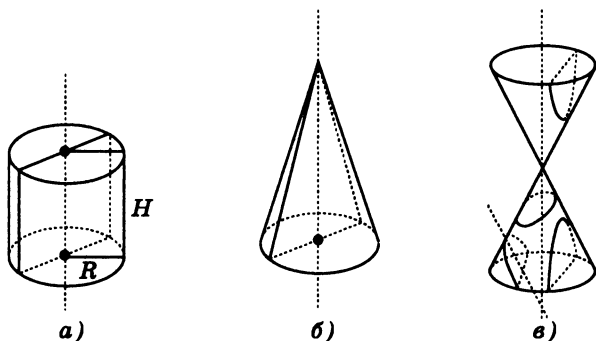


Рис. 9.28.

Цилиндр (а), конус (б) и плоские сечения конической поверхности (в): эллипс, парабола, гипербола

3°. *Конус* (прямой круговой) — тело, ограниченное поверхностью вращения равнобедренного треугольника вокруг его оси симметрии (рис. 9.28, б). Поверхность конуса состоит

из круга — основания и боковой поверхности. Вершину конуса можно соединить с любой точкой окружности основания образующей — отрезком, лежащим на боковой поверхности. Высота конуса — расстояние от вершины до основания. Сечение боковой поверхности плоскостью, параллельной основанию, — окружность; сечение наклонной плоскостью — эллипс, часть параболы (п. 9.3.4°) или часть одной ветви гиперболы (п. 9.3.3°) — это зависит от наклона плоскости (рис. 9.28, а).

Объем, площади боковой и полной поверхностей конуса:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi r^2 H, \quad S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} PL = \pi r L, \quad S_{\text{полн.}} = \pi r(r + L),$$

где  $r$  — радиус,  $S_{\text{осн.}}$  — площадь,  $P$  — длина окружности основания,  $L$  — длина образующей,  $H$  — высота конуса (рис. 9.28, б).

Усеченный конус — часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, параллельным основанию (рис. 9.29, а). Усеченный конус — результат вращения равнобедренной трапеции вокруг ее оси симметрии. Основания трапеции при вращении пробегают круги — основания усеченного конуса. Высота усеченного конуса — расстояние между основаниями.

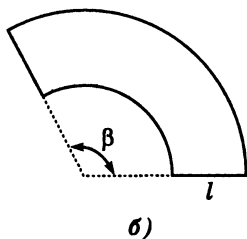
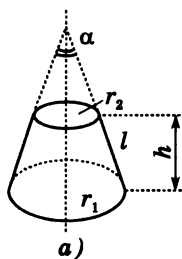
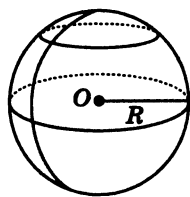


Рис. 9.29.

Усеченный конус (а) и его развертка (б)

Рис. 9.30.  
Шар

Объем и площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2), \quad S_{\text{бок.}} = \pi (r_1 + r_2) l,$$

где  $h$  — высота усеченного конуса,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований,  $l$  — длина образующей усеченного конуса.

*Развертка* боковой поверхности конуса — сектор, радиус которого равен образующей конуса; развертка боковой поверхности усеченного конуса — соответствующая часть кругового кольца (рис. 9.29, б).

Если  $\alpha$  — угол при вершине в осевом сечении конуса,  $\beta$  — центральный угол на развертке (угол раствора сектора), то

$$\beta = 2\pi \sin(\alpha/2).$$

4°. *Сфера* — множество точек в пространстве, равноудаленных от фиксированной точки (*центра* сферы). *Шар* — тело, ограниченное сферой (рис. 9.30), — есть результат вращения круга около его диаметра. *Радиус* сферы — расстояние от центра до любой точки сферы, *диаметр* — длина отрезка, соединяющего две точки на сфере и проходящего через центр. Диаметр равен двум радиусам. Иногда радиусом и диаметром называют сами отрезки.

Плоскость в пространстве либо не имеет общих точек со сферой, либо имеет одну общую точку (*точку касания*), либо пересекается по окружности. Плоские сечения шара представляют собой круги, наибольший из которых проходит через центр шара (*большой круг*). Экватор на глобусе — окружность большого круга, меридианы — полуокружности больших кругов (рис. 9.30). Через две точки, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести одну и только одну окружность большого круга. Касательная к сфере плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

В прямоугольной системе координат (п. 8.3.3°) уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты переменной точки на сфере;  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра;  $R$  — радиус сферы. Объем шара и площадь сферы:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S = 4\pi R^2.$$

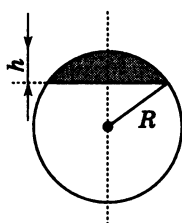


Рис. 9.31.

Шаровой сегмент

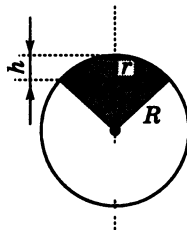
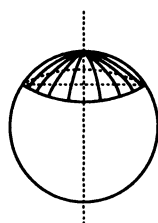


Рис. 9.32.

Шаровой сектор

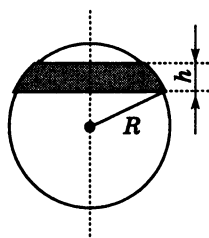
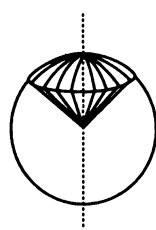
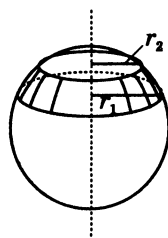


Рис. 9.33.

Шаровой слой



5°. *Шаровой сегмент* — часть шара, отсеченная от него плоскостью (рис. 9.31). *Сегментная поверхность* — часть сферы, отсекаемая плоскостью. Объем шарового сегмента и площадь сегментной поверхности ( $h$  — высота шарового сегмента):

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h), \quad S = 2\pi Rh.$$

6°. *Шаровой сектор (телесный угол)* — тело вращения плоского кругового сектора (п. 9.3.1°) вокруг его оси симметрии (рис. 9.32). Шаровой сектор можно составить из конуса и шарового сегмента. Полная поверхность шарового сектора состоит из сегментной поверхности и боковой поверхности конуса. Объем и площадь полной поверхности шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h, \quad S_{\text{полн.}} = 2\pi Rh + \pi R\sqrt{2Rh - h^2},$$

где  $R$  — радиус шара,  $h$  — высота шарового сегмента.

7°. *Шаровой слой* — часть шара, вырезаемая из него двумя параллельными плоскостями (рис. 9.33). Объем и площадь полной поверхности шарового слоя:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2),$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R h + \pi(r_1^2 + r_2^2),$$

где  $h$  — высота,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований шарового слоя.

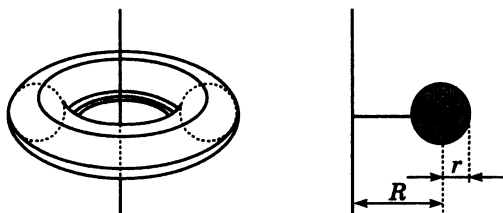


Рис. 9.34.

Тор

8°. *Тор* — тело вращения круга вокруг оси, расположенной в плоскости круга вне его (рис. 9.34). Автомобильная камера, бублик имеют (приблизительно) форму тора. Объем и площадь поверхности тора:

$$V = 2\pi^2 r^2 R, \quad S = 4\pi^2 r R,$$

где  $r$  — радиус круга,  $R$  — расстояние от центра круга до оси вращения.

## 9.7. Кривизна поверхности

1°. Рассмотрим поверхность  $S$  в пространстве (рис. 9.35, а). Пусть  $A_0, A_1, A_2$  — три некоторые близкие точки поверхности, не лежащие на одной прямой; через эти точки проведем *секущую* плоскость. Если одновременно устремить точки  $A_1$  и  $A_2$  к точке  $A_0$ , то секущая плоскость в пределе превратится в плоскость, *касательную* к поверхности в точке  $A_0$  — точке касания (рис. 9.35, б). При этом предполагается, что точки  $A_1$  и  $A_2$  приближаются к точке  $A_0$  по кривым, имеющим различные касательные в точке  $A_0$ .

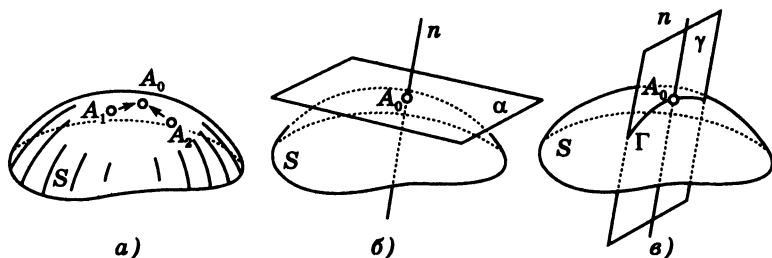


Рис. 9.35.

*а* — к определению касательной плоскости; *б* — касательная плоскость и нормаль к поверхности; *в* — нормальное сечение поверхности

*Выпуклая* поверхность имеет с любой касательной плоскостью одну общую точку; такая поверхность лежит по одну сторону от любой касательной плоскости (это аналог выпуклой кривой, см. п. 5.4.4°). Примеры выпуклых поверхностей: сфера, эллипсоид вращения (результат вращения эллипса вокруг одной из его осей симметрии).

2°. Пусть  $A_0$  — точка касания плоскости  $\alpha$  и выпуклой поверхности  $S$ . *Нормалью* к поверхности в точке  $A_0$  называется перпендикуляр к касательной плоскости, проведенной через точку  $A_0$  (рис. 9.35, б). Сечения поверхности плоскостями, проходящими через нормаль, называются *нормальными* (рис. 9.35, в, нормальное сечение  $\Gamma$  — пересечение поверхности  $S$  и плоскости  $\gamma$ ).

Радиус кривизны  $R$  (п. 9.3.5°) нормального сечения зависит, вообще говоря, от положения плоскости  $\gamma$ : поворачивая эту плоскость вокруг нормали  $n$ , мы будем получать различные значения  $R$  (в случае сферы все радиусы кривизны одинаковы и равны радиусу сферы). Наименьшее значение  $R$  обозначим  $R_1$ , наибольшее значение —  $R_2$ . Можно доказать, что соответствующие  $R_1$  и  $R_2$  нормальные сечения лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях.

*Средней кривизной* поверхности  $S$  в точке  $A_0$  называется величина

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.1)$$

Величина  $\rho = 1/H$  называется радиусом кривизны поверхности. Для сферы радиуса  $R$  во всех точках  $H = 1/\rho$ ,  $\rho = R$ . Для точек поверхности тора (п. 9.6.8°), наиболее удаленных от центра симметрии (рис. 9.34),

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R+r} + \frac{1}{r} \right), \quad \rho = 2r \frac{R+r}{R+2r}. \quad (9.2)$$

Для цилиндрической поверхности наименьший радиус кривизны совпадает с радиусом цилиндра  $R$ ,  $R_2 = \infty$ ; поэтому  $H = 1/2R$ ,  $\rho = 2R$ .

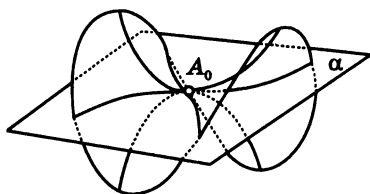


Рис. 9.36.

Седло — пример невыпуклой поверхности

3°. Примером невыпуклой поверхности служит *седло* (рис. 9.36). Невыпуклая поверхность в окрестности точки касания лежит по разные стороны от касательной плоскости (поверхность пересекается с касательной плоскостью по некоторым линиям). В случае невыпуклой поверхности формула

(9.1) сохраняется; при этом одну из величин  $R_1$  или  $R_2$  следует считать отрицательной; формулу (9.1) можно также записать в виде

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|} \right). \quad (9.3)$$

Средняя кривизна может оказаться равной нулю, например, в точках поверхности тора, ближайших к центру симметрии (рис. 9.34):

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R-r} \right),$$

и если  $R = 2r$ , то  $H = 0$ .

Понятие кривизны поверхностей используется в физике (п. Ф3.5.2°, Ф4.1.4°).

## 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В связи с быстрым развитием вычислительной техники особенно возрастает роль вычислительной математики — раздела математики, занимающегося разработкой методов приближенного решения задач. В данной главе кратко излагаются некоторые простейшие методы аппроксимации функций, приближенного интегрирования, приближенного решения обычных и дифференциальных уравнений.

### 10.1. Округления и погрешности

**1°. Решение любой физической или технической задачи сопровождается вычислениями.** В простейших случаях требуется выполнить несколько операций; например, для нахождения массы газа в цилиндрическом сосуде (п. Ф3.1.3°) по формуле  $m = \rho V = \rho \cdot \pi R^2 H$  (где  $\rho$  — плотность газа,  $R$  — радиус основания цилиндра,  $H$  — высота) нужно произвести четыре умножения:  $\rho \cdot \pi \cdot R \cdot R \cdot H$ . Такие несложные вычисления выполняются «вручную» (на листе бумаги) или с помощью микрокалькулятора. Правила округления, применяемые в подобных случаях, см. в п. 1.3.1°.

**2°. Решение более сложных задач может потребовать выполнения не единиц или десятков, а сотен тысяч или миллионов операций.** Например, при расчете движения межпланетных станций приходится решать большие системы дифференциальных уравнений, для чего необходимы мощные автоматизированные вычислительные машины (компьютеры).

Традиционную схему решения физической задачи с помощью компьютера можно представить себе следующим образом. Вначале создают *математическую модель* физической задачи, т. е. формулируют математическую задачу, соответствующую физической задаче; далее подбирают подходящий *приближенный* (или *численный*) метод решения математической задачи, позволяющий записать соответствующий *алгоритм*, т. е. последовательность формул и правил для получе-



ния ответа; затем алгоритм записывают в виде *программы* для компьютера. В таком виде задача вводится в машину; ответ получается в виде чисел, таблиц чисел, графиков, рисунков на экране компьютера или управляющих сигналов для каких-либо установок.

Пусть, например, некоторый процесс можно описать дифференциальным уравнением  $x'(t) = f(t, x(t))$  с начальным условием  $x(t_0) = A$  (п. 5.5.3°), где  $t$  — время,  $x(t)$  — неизвестная функция, число  $A$  и функция  $f(t, x)$  известны — из теории или эксперимента. Так как не существует формул для решений дифференциальных уравнений с произвольной правой частью, приходится привлекать приближенные методы, например метод Эйлера (п. 10.5.1°):

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

где  $x_0 = A$ ,  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ; шаг  $h$  выбирается по возможности малым. Таким образом, алгоритм приближенного решения задачи состоит в последовательном вычислении  $x(t)$  в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Соответствующая программа на каком-либо *алгоритмическом языке* (Бейсик, Фортран, Паскаль, Си и т. п.) составляется легко; результаты расчета удовлетворительны при достаточно малых  $h$ . Более высокую точность дает метод Рунге — Кутты (п. 10.5.2°).

**3°. С вычислениями связаны три типа погрешностей:** *погрешности исходных данных* (приближенность результатов измерений); *погрешности метода* (формулы численных методов даже при идеально точном счете дают обычно лишь приближенные ответы); *погрешности округлений*.

Современные компьютеры обладают быстроедействием в десятки и сотни миллионов операций в секунду и высокой точностью (10 – 20 и более десятичных разрядов). Следует, однако, помнить, что практически все арифметические операции, которые производит вычислительная машина, выполняются с округлениями, при этом каждое округление несколько искажает результат. Суммарная погрешность, как правило, ма-

ла, но при некоторых неблагоприятных условиях может очень сильно исказить ответ. Для иллюстрации сказанного приведем два примера такого рода вычислений на 4-разрядной машине.

### Примеры

1)  $C = (A + B - A) \cdot 10^3$ , где  $A = 5 \cdot 10^4$ ,  $B = 1$ . Для сложения  $A + B$  вначале машина выравнивает порядки:

$$5,000 \cdot 10^4 + 0,00001 \cdot 10^4 = (5,000 + 0,00001) \cdot 10^4,$$

и округляет до четырех разрядов:

$$(5,000 + 0,000) \cdot 10^4 = 5,000 \cdot 10^4.$$

В результате получаем

$$C = (5,000 \cdot 10^4 - 5,000 \cdot 10^4) \cdot 10^3 = 0,000 \cdot 10^3 = 0,$$

в то время как точный ответ был бы  $C = 1000$ .

2) Пусть в процессе счета машина в некоторый момент должна выполнить действия:  $C = (A - B) : 3$ , причем к этому моменту переменные  $A$  и  $B$  (после округлений с 4-разрядной точностью) получили значения  $A = 3,142 \cdot 10^2$ ,  $B = 3,131 \cdot 10^2$ . Машина выполнит действия:

$$A - B = 0,001 \cdot 10^2 = 1,100; \quad C = 1,100 : 3 \rightarrow 3,667 \cdot 10^{-1}.$$

Надежны ли все четыре цифры ответа? Очевидно, нет, так как значения  $A$  и  $B$  приближенные, и неизвестны их точные пятая, шестая и т. д. цифры. Правильно было бы записать приближенный результат в виде  $3,7 \cdot 10^{-1}$  (п. 1.3.1°); машина же никаких указаний на это не дает!

Эти примеры иллюстрируют явление «потери точности» при счете с округлениями. Следует по возможности избегать таких ситуаций. Так, если в первом примере перестроить формулу:  $C = (A - A + B) \cdot 10^3$ , то получится точный результат  $C = 10^3$ .

*Замечание.* В настоящее время широкое распространение получили компьютерные программы и пакеты программ типа Matcad, Matlab, Mathematica и др., ориентированные на научных и инженерно-технических работников в областях, где тре-

буются математические вычисления и средства компьютерной обработки данных. Такие программы позволяют быстро и с высокой точностью вычислять решения многих математических задач, включая построение всевозможных графиков функций, приближенное интегрирование, действия с матрицами и дифференциальные уравнения. В основе любой такой программы лежит тот или иной метод приближенного вычисления, поэтому пользователю такого рода программ также полезно ознакомиться с основами соответствующей теории. Описываемые ниже приближенные методы, кроме того, в ряде случаев могут помочь найти модельный подход к сложной задаче (например, приближенное линейное уравнение колебаний математического маятника).

В дальнейших параграфах рассматриваются некоторые простейшие приближенные методы. Все вычисления в приведенных примерах выполнены на 10-разрядном микрокалькуляторе; ответы округлены.

## 10.2. Приближение функций

1°. *Приближение (аппроксимацию) функций*, или приближенное представление функций, применяют в двух случаях:

- 1) когда заданная функциональная зависимость слишком сложна, надо приближенно заменить ее более простой;
- 2) когда функциональная зависимость задана таблицей.

Многие приближенные формулы основаны на разложении функции в степенной ряд (п. 5.8.4°) в окрестности заданной точки (*ряд Тейлора*):

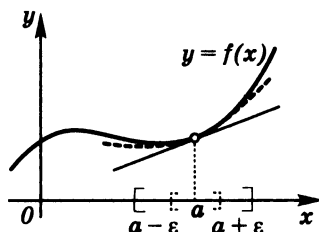
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots$$

Обрывая ряд на некотором члене, получают приближенные формулы различной степени точности в виде многочлена степени  $n$ :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad (10.1)$$

пригодные при  $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — некоторое число (рис. 10.1; пунктирная линия — многочлен степени  $n > 1$ , прямая линия — линейное приближение).

Рис. 10.1.  
Приближение функции отрезком  
ряда Тейлора: прямая линия —  
линейное приближение,  
штриховая — квадратичное



Модуль разности точного и приближенного значений функции, называемый *погрешностью* приближенной формулы, оценивается следующим образом:

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x - a|^{n+1},$$

где

$$M_{n+1} = \max_{a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon} |f^{(n+1)}(x)|.$$

В этих формулах символ  $n!$  означает произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  (§ 6.1), символ  $f^{(n)}(x)$  — производная  $n$ -го порядка от функции  $f(x)$  в точке  $x$  (п. 5.4.2°).

Чаще всего используют *линейное* приближение:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Погрешность линейного приближения:

$$|r_1(x)| \leq \frac{1}{2} (x - a)^2 \cdot \max_{a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon} |f''(x)|.$$

Геометрический смысл линейного приближения: график функции  $f(x)$  вблизи точки  $a$  заменяется прямой линией  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ , касательной к графику функции в точке  $x = a$  (рис. 10.1). Применение линейного приближения к физической задаче о математическом маятнике см. в п. Ф5.3.1°.

## Примеры

1)  $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 1$ . Здесь

$$e^x = 1 + x, \quad |r_1(x)| \leq 0,5x^2e^\varepsilon.$$

Если взять  $\varepsilon = 0,1$ , то погрешность не превосходит  $0,5x^2e^{0,1} \leq 0,6x^2$ . Так как  $|x| \leq 0,1$ , то  $x^2 \leq 0,01$ ; тогда  $|r_1(x)| \leq 0,006$ .

2)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $a = 0$ ,  $n = 5$ . Здесь

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}, \quad |r_5(x)| \leq |x|^6 \cdot \frac{5!}{6!} = \frac{|x|^6}{6}.$$

Если взять  $\varepsilon = 0,5$ , то  $|r_5(x)| \leq (0,5)^6/6 < 0,03$ .

3)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = 0$ ,  $n = 6$ . Здесь

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad |r_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

Если взять  $\varepsilon = 1$ , то  $|r_6(x)| < 0,0002$ .

*Замечание.*  $x$  — угол в радианной мере (п. 9.1.5°), т. е. полученное приближение справедливо при  $|x| \leq 57^\circ$ .

Некоторые часто встречающиеся приближенные формулы, полученные из формулы (10.1), представлены в табл. 10.1.

**2°. Функция  $y = y(x)$  может быть задана в виде таблицы:** дается несколько значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  аргумента и соответствующих значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  функции. Например, из эксперимента получена зависимость температуры  $T$  образца от времени  $t$ , представленная в табл. 10.2. Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , называют *узлами* таблицы, точки  $(x_k, y_k)$  — *узловыми точками*. Требуется найти значение функции  $y(x)$  в некоторой точке  $x$ , расположенной на оси  $x$  между узлами либо вне промежутка, содержащего все узлы.

В такой постановке задача имеет бесчисленное множество решений — ответом может служить произвольное число. При разумной постановке задачи следует указать некоторый класс (т. е. множество) функций, среди которых разыскивается искомое приближение — тогда ответ будет вполне определенным.

Таблица 10.1

Приближенные формулы

Приближенная формула	Область применения	Погрешность при данном $x \neq 0$ меньше чем	Погрешность на всем промежутке меньше чем
$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$	$ x  \leq 0,5$ $ x  \leq 0,1$	$0,2x^2$ $0,15x^2$	$4,3 \cdot 10^{-2}$ $1,5 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$	$ x  \leq 0,3$ $ x  \leq 0,1$	$1,5x^2$ $1,2x^2$	0,13 $1,2 \cdot 10^{-2}$
$e^x \approx 1 + x$	$ x  \leq 0,5$ $ x  \leq 0,1$	$0,6x^2$ $0,6x^2$	0,15 $5,2 \cdot 10^{-3}$
$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$	$ x  \leq 0,3$ $ x  \leq 0,1$	$0,8x^2$ $0,6x^2$	$5,7 \cdot 10^{-2}$ $5,4 \cdot 10^{-3}$
$\sin x \approx x$	$ x  \leq 1$ $ x  \leq 0,1$	$\frac{1}{6} x ^3$ $\frac{1}{6} x ^3$	0,16 $1,7 \cdot 10^{-4}$
$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$	$ x  \leq 1$ $ x  \leq 0,1$	$\frac{1}{24}x^4$ $\frac{1}{24}x^4$	$4,1 \cdot 10^{-2}$ $4,2 \cdot 10^{-6}$
$\operatorname{sh} x \approx x$	$ x  \leq 1$ $ x  \leq 0,1$	$0,2 x ^3$ $0,2 x ^3$	0,18 $1,7 \cdot 10^{-4}$
$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$	$ x  \leq 1$ $ x  \leq 0,1$	$0,05x^4$ $0,05x^4$	$4,4 \cdot 10^{-2}$ $4,2 \cdot 10^{-6}$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$ x  \leq 0,5$ $ x  \leq 0,1$	$0,85 x ^3$ $0,35 x ^3$	$4,7 \cdot 10^{-2}$ $3,4 \cdot 10^{-4}$
$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$	$ x  \leq 1$ $ x  \leq 0,1$	$\frac{1}{120} x ^5$ $\frac{1}{120} x ^5$	$8,2 \cdot 10^{-3}$ $8,4 \cdot 10^{-8}$
$\operatorname{arctg} x \approx x$	$ x  \leq 0,5$ $ x  \leq 0,1$	$\frac{1}{3} x ^3$ $\frac{1}{3} x ^3$	$4,2 \cdot 10^{-2}$ $3,4 \cdot 10^{-4}$
$\arcsin x \approx x$	$ x  \leq 0,5$ $ x  \leq 0,1$	$0,25 x ^3$ $0,2 x ^3$	$2,4 \cdot 10^{-2}$ $1,7 \cdot 10^{-4}$

Таблица 10.2

## Результат эксперимента

$t, \text{с}$	0	10	20	30	40	50	60	70
$T, ^\circ\text{C}$	54,15	54,22	54,21	54,19	54,18	54,21	54,31	54,46

Один из часто применяемых при *интерполяции* классов функций — многочлены заданной степени. Многочлен, график которого проходит через все узловые точки, называется *интерполяционным многочленом*. При заданной таблице с  $n$  узлами интерполяционный многочлен степени  $(n - 1)$  всегда существует и притом единственный.

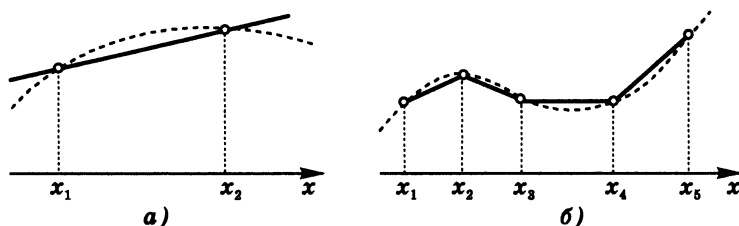


Рис. 10.2.

$a$  — линейная интерполяция на отрезке;  
 $b$  — линейная ломаная (линейный сплайн)

Наиболее распространенной является *линейная*, реже — квадратичная интерполяция. При линейной интерполяции на отрезке  $[x_1, x_2]$  функцию  $y(x)$  приближают линейной функцией, график которой (прямая линия) проходит через две узловые точки:  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (рис. 10.2,  $a$ ):

$$y(x) = y_1 + (x - x_1)(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

или

$$y(x) = y_2 - (x_2 - x)(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1). \quad (10.2)$$

Для погрешности линейной интерполяции справедлива оценка

$$|r_1(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot (x_2 - x_1)^2 \cdot \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |y''(x)|,$$

имеющая лишь теоретический интерес, так как сама функция  $y(x)$  нам неизвестна. Формулу (10.2) используют также для *экстраполяции*, т. е. при  $x < x_1$  или  $x > x_2$ .

Если таблица содержит более двух точек, то на каждом промежутке между соседними узлами можно применять линейную интерполяцию — в результате график функции  $y(x)$  будет приближен линейной ломаной, проходящей через узловые точки (рис. 10.2, б). Линейная интерполяция используется, в частности, при работе с математическими таблицами. Для приближения функций часто используют *сплайны*, т. е. кусочно-многочленные гладкие функции. Сплайн  $S_m(x)$  степени  $m$ , соответствующий заданному разбиению промежутка  $[a, b]$  на части:

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_{n-1} = [a, b],$$

на каждом частичном промежутке  $\Delta_k$  совпадает с каким-либо многочленом степени не выше  $m$ , а в точках деления промежутка имеет непрерывные производные до порядка  $(m - 1)$  включительно. В частности, *линейный*

сплайн  $S_1(x)$  — это непрерывная функция, на каждом промежутке  $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$  представляющая собой линейную функцию (свою на каждом промежутке). График линейного сплайна — линейная ломаная (рис. 10.2, б).

*Квадратичный* сплайн  $S_2(x)$  — это непрерывная функция, на каждом промежутке между узлами совпадающая с некоторым квадратным трехчленом; в узловых точках график квадратичного сплайна «гладкий», т. е. не имеет изломов, в этих точках график имеет касательную: производная  $S_2'(x)$  непрерывна в местах соединения соседних звеньев сплайна (рис. 10.3). Условием прохождения через узловые точки квадратичный сплайн задается не полностью; для однозначного определения сплайна следует задать дополнительно, например, наклон касательной в одной из узловых точек.

*Кубический* сплайн  $S_3(x)$  определяется аналогично квадратичному: на каждом промежутке  $[x_k, x_{k+1}]$  сплайн  $S_3(x)$  равен

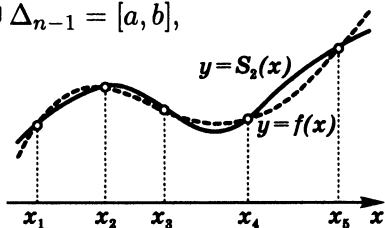


Рис. 10.3.

Приближение функции  
квадратичным сплайном



какому-либо многочлену третьей степени, а в узловых точках сам сплайн  $S_3(x)$  и его производные  $S_3'(x)$  и  $S_3''(x)$  непрерывны. Для однозначного задания кубического интерполяционного сплайна следует задать дополнительно, например, наклон касательных в крайних узловых точках.

3°. Метод наименьших квадратов (МНК) часто применяется для приближения функции, в частности при обработке результатов измерений. Пусть задана таблица  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  некоторой функции  $y = y(x)$ . В методе наименьших квадратов приближенную функцию ищут в виде многочлена невысокой степени, обычно первой:  $y(x) \approx \tilde{y}(x) = ax + b$ , реже — второй, третьей степени. Параметры  $a$

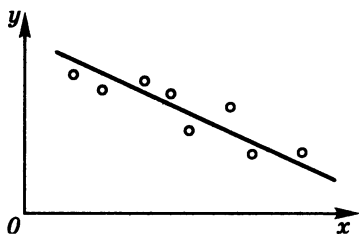


Рис. 10.4.

Приближение по методу  
наименьших квадратов

и  $b$  в МНК подбираются таким образом, чтобы *квадратичное отклонение*

$$\varphi(a, b) = \sum_{k=1}^n [y_k - (ax_k + b)]^2$$

оказалось минимальным. Это условие дает для  $a$  и  $b$  *нормальную систему уравнений*

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 b = \gamma_1 \\ \alpha_2 a + \beta_2 b = \gamma_2 \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{k=1}^n x_k, & \beta_1 &= n, & \gamma_1 &= \sum_{k=1}^n y_k, \\ \alpha_2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2, & \beta_2 &= \alpha_1, & \gamma_2 &= \sum_{k=1}^n x_k y_k. \end{aligned}$$

Нормальная система всегда имеет единственное решение  $(a, b)$ , которое можно найти по формулам Крамера или методом исключения (п. 3.6.1°). В результате получаем линейное приближение  $y(x) = ax + b$ , наиболее близкое (в смысле квадратичного отклонения) к табличной функции. График приближенной функции проходит вблизи узловых точек (рис. 10.4). В случае приближения многочленами более высокой степени нормальная система состоит из большего числа уравнений.

### 10.3. Приближенное интегрирование

Вычислить определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  по формуле Ньютона — Лейбница (п. 5.7.2°) удастся лишь в тех случаях, когда известна первообразная функция. Для приближенного интегрирования применяют *квадратурные формулы*, в частности *формулы трапеций*, *прямоугольников* и *Симпсона*. Общая идея получения таких формул состоит в приближенной замене подынтегральной функции более простой функцией, интеграл от которой легко находится.

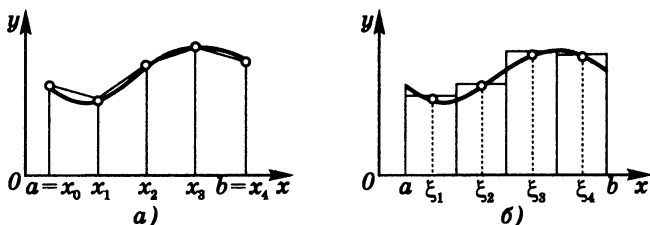


Рис. 10.5.

К формулам трапеций (а) и прямоугольников (б)

1°. Промежуток интегрирования  $[a, b]$  разбивают на  $n$  равных частей при помощи точек  $x_k = a + kh$ , где  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = (b - a)/n$  — шаг интегрирования. Точки  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$  называются узлами. На каждом частичном промежутке функция  $f(x)$  заменяется линейной функцией, график которой проходит через те же точки  $(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ , что и график  $f(x)$ . Точное значение интеграла, равное площади криволинейной трапеции (п. 5.7.1°), приближенно заменяется суммой площадей прямолинейных трапеций (рис. 10.5, а,  $n = 4$ ). Вычисление ведется по формуле трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right], \quad (10.3)$$

или, в развернутой записи,

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) \right].$$

Погрешность  $R_n$  формулы трапеций, т. е. разность между точным значением интеграла  $I = \int_a^b f(x) dx$  и *квадратурной суммой* (правой частью формулы (10.3)), оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leq \frac{M_2}{12n^2},$$

где

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Видно, что при увеличении  $n$  погрешность убывает как  $1/n^2$ . Формула трапеций проста и обычно дает хорошую точность уже при  $n$  порядка 10–200.

**Пример**

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx.$$

$$\text{Точное значение } I = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1.$$

По формуле трапеций:

$$\text{при } n = 4 \quad I \approx 1,013; \quad \text{при } n = 8 \quad I \approx 1,003.$$

**2°. При тех же точках деления  $x_k = a + kh$ , что и в формуле трапеций, на каждом частичном промежутке  $[x_{k-1}, x_k]$  берут среднюю точку  $\xi_k = a - h/2 + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  и приближенно вычисляют интеграл по формуле прямоугольников**

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^n f\left(a - \frac{h}{2} + kh\right), \quad (10.4)$$

или, в развернутой записи,

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + 3\frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right].$$

Геометрический смысл формулы прямоугольников: площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой

площадей прямоугольников, основания которых — частичные промежутки, а высоты равны  $f(\xi_k)$  (рис. 10.5, б,  $n = 4$ ).

Погрешность формулы прямоугольников:

$$|R_n| \leq \frac{M_2}{24n^2},$$

где

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Обычно при  $n$  порядка 10–200 формула прямоугольников дает хорошую точность.

**Пример**

$$\begin{aligned} \text{При } n = 4 \quad \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx &\approx \\ &\approx \frac{\pi}{8} \left[ f\left(\frac{1}{16}\pi\right) + f\left(\frac{3}{16}\pi\right) + f\left(\frac{5}{16}\pi\right) + f\left(\frac{7}{16}\pi\right) \right] \approx 0,9935. \end{aligned}$$

**3°. Формула Симпсона** (или *формула парабол*) основана на квадратичной интерполяции подынтегральной функции. На каждом частичном промежутке функция  $f(x)$  приближенно заменяется квадратичной функцией, график которой (парабола) проходит через три точки:

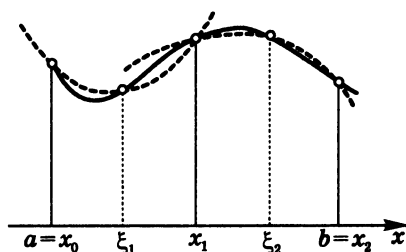


Рис. 10.6.  
К формуле Симпсона

$$(x_k, f(x_k)), \quad (\xi_k, f(\xi_k)), \quad (x_{k+1}, f(x_{k+1})),$$

где  $\xi_k = a - h/2 + kh$  — середина частичного промежутка. В результате площадь всей криволинейной трапеции приближенно заменяется суммой площадей  $n$  маленьких криволинейных трапеций (рис. 10.6,  $n = 2$ ).

Вычисление проводится по формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \left\{ f(a) + f(b) + 2[f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h)] + 4 \left[ f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + 3\frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(b - \frac{h}{2}\right) \right] \right\}, \quad (10.5)$$

или, в короткой записи,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3}(S_1 + S_3) + \frac{2}{3}S_4, \quad (10.6)$$

где

$$S_1 = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)], \quad S_2 = h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh),$$

$$S_4 = h \sum_{k=1}^n f\left(a - \frac{h}{2} + kh\right), \quad h = \frac{b-a}{n} \text{ (шаг разбиения)}.$$

Очевидно, число  $(S_1 + S_2)$  представляет собой квадратурную сумму формулы трапеций (10.3), число  $S_4$  — квадратурную сумму формулы прямоугольников (10.4). Оценка погрешности формулы Симпсона:

$$|R_n| \leq \frac{M_4}{2880n^4}, \quad \text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{IV}(x)|.$$

Видно, что при увеличении  $n$  погрешность убывает как  $1/n^4$ , т. е. гораздо быстрее, чем в формулах трапеций или прямоугольников. В большинстве случаев для приближенного интегрирования применяют формулу Симпсона.

**Пример**

$$I = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = 1.$$

По формуле (10.5) при  $n = 4$  имеем  $I \approx 0,999975$ .

*Замечание.* Часто формулу Симпсона записывают в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h_1}{3} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(\eta_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(\eta_{2i-1}) \right],$$

где  $h_1 = \frac{h}{2} = \frac{b-a}{2n}$  — шаг интегрирования,  $N = 2n - 1$  — общее число всех внутренних узлов  $\eta_i \in (a, b)$ ,  $\eta_i = a + ih_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

4°. Другой способ приближенного интегрирования основан на использовании *формулы Тейлора* (п. 10.2.1°): если функцию  $f(x)$  разложить в ряд в окрестности какой-нибудь точки  $c \in [a, b]$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  приближенно равен сумме вида

$$\begin{aligned} \sigma_n = f(c)(b-a) + \frac{1}{2!} f'(c) [(b-c)^2 - (a-c)^2] + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(c) [(b-c)^{n+1} - (a-c)^{n+1}]. \end{aligned}$$

*Пример*

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \sin x dx &\approx \int_0^1 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{8!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{720} - \frac{1}{40320} = 0,45969742\dots \end{aligned}$$

Точное значение:  $I = 1 - \cos 1 = 0,45969769\dots$

Метод разложения по формуле Тейлора дает хорошие результаты, если промежуток интегрирования невелик. Основные разложения см. в п. 5.8.4°.

5°. Несобственные интегралы (п. 5.7.3°) вида  $I = \int_0^\infty f(x) dx$ ,

где  $f(x)$  — непрерывная функция, можно приближенно вычислять методом «усечения»: промежуток  $[a, \infty)$  разбивается на  $[a, b]$  и  $[b, \infty)$ , причем число  $b$  берется настолько большим, чтобы  $\int_b^\infty f(x) dx$  был малой величиной (например, меньше  $10^{-4}$ ).

Тогда  $I \approx \int_a^b f(x) dx$ , и к этому интегралу можно применить одну из квадратурных формул.

Пример

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx = \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx + \int_{10}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx;$$

$$\int_{10}^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx < \int_{10}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-10} = 4,54 \cdot 10^{-5} \approx 5 \cdot 10^{-5}.$$

По формуле Симпсона при  $n = 2$  получаем

$$\int_0^{10} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx \approx 0,87154.$$

#### 10.4. Приближенное решение уравнений

1°. Метод деления отрезка пополам (метод вилки, метод бисекции) применяется к уравнениям общего вида

$$f(x) = 0. \quad (10.7)$$

Предполагается, что на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  непрерывна и имеет на концах разные знаки:  $f(a)f(b) < 0$ . Тогда, согласно теореме Коши (п. 5.3.1°), уравнение (10.7) имеет хотя бы один корень  $\xi \in (a, b)$ . В методе деления пополам за начальное приближение к корню  $\xi$  принимается середина промежутка  $[a, b]$ , т. е.  $x_0 = (a + b)/2$ .

Далее вычисляется  $f(x_0)$ . Если  $f(a)f(x_0) < 0$ , то это означает, что  $\xi \in (1, x_0)$ , и тогда за первое приближение принимают  $x_1 = (a + x_0)/2$ ; если  $f(x_0) = 0$ , то  $x_0 = \xi$  (корень найден); если  $f(a)f(x_0) > 0$ , то это означает, что  $\xi \in (x_0, b)$ , и тогда полагают  $x_1 = (x_0 + b)/2$ .

Затем вычисляют  $f(x_1)$  и снова проверяются знаки  $f(x_1)f(x_0)$  и т. д. Погрешность  $n$ -го приближения:  $|x_n - \xi| \leq (b - a)/2^n$ . Метод деления пополам простой и надежный, но сходимость  $x_n \rightarrow \xi$  довольно медленная.

2°. Метод итераций применяется к уравнениям вида

$$x = f(x). \quad (10.8)$$

Пусть  $\xi$  — корень уравнения (10.8). Итерационный процесс состоит из следующих действий: выбирается некоторое число

$x_0$  — начальное приближение, вычисляется первое приближение (первая итерация) по формуле  $x_1 = f(x_0)$ , далее — второе приближение (вторая итерация)  $x_2 = f(x_1)$  и т. д. Общая формула для итерации:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Достаточные условия сходимости последовательности итераций к корню уравнения (10.8): пусть в некоторой окрестности  $D_\varepsilon = [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$  корня  $\xi$  функция  $f(x)$  непрерывна и ее производная непрерывна и удовлетворяет условию «сжатия»  $|f'(x)| < 1$ . Тогда при любом  $x_0 \in D_\varepsilon$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ; корень  $\xi$  — единственный в  $D_\varepsilon$ .

### Пример

Уравнение Кеплера:  $x = 0,3 \sin x + 1$ . По графикам левой и правой частей уравнения видно, что  $\xi$  существует. Так как здесь

$$f(x) = 0,3 \sin x + 1, \quad f'(x) = 0,3 \cos x, \quad |f'(x)| \leq 0,3$$

при любых  $x \in \mathbb{R}$ , то условия сходимости выполнены при произвольном выборе  $\varepsilon$ . В качестве  $x_0$  можно взять любое число. Пусть  $x_0 = 0$ ; тогда последующие приближения будут иметь вид

$$1; 1,25244; 1,2849; 1,2878; 1,288069; 1,2880894; 1,2880911; 1,2880913; 1,288091312; 1,2880911313; 1,2880911313.$$

Метод итераций пригоден и для вычисления комплексных корней. Неудобства метода — в необходимости преобразования общего уравнения вида (10.7) к специальному виду (10.8), причем должны выполняться условия сходимости.

**3°. Метод Ньютона (метод касательных)** применяют к уравнениям вида  $f(x) = 0$ , где  $f(x)$  непрерывна и имеет непрерывную производную. Корень приближенно определяется следующим образом: выбирается начальное приближение  $x_0$  (по возможности близко к корню  $\xi$ ), в точке  $x_0$  вычисляются значения функции  $f(x_0)$  и ее производной  $f'(x_0)$ ; тогда первое приближение  $x_1$  находится по формуле  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ .



Далее вычисляются  $f(x_1)$  и  $f'(x_1)$ , и второе приближение  $x_2$  находится аналогично:  $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$  и т. д. Общий вид итерационного процесса Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Пусть  $\xi$  — простой корень, т. е.  $f(\xi) = 0$  и  $f'(\xi) \neq 0$ ; если начальное приближение  $x_0$  взято достаточно близко к корню  $\xi$ , то последовательность итераций по методу Ньютона сходится к этому корню:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ . Если же  $x_0$  недостаточно близко к корню, то последовательность  $x_n$  может сойтись к другому корню, может и вовсе не иметь предела.

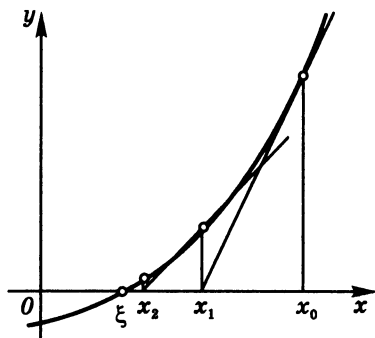


Рис. 10.7.

К методу Ньютона

При некоторой дополнительной информации о поведении функции  $f(x)$  выбор  $x_0$  значительно облегчается. Например, если выполняются условия

$$f(a)f(b) < 0,$$

$$f'(x) \neq 0 \text{ при } x \in [a, b],$$

$$f''(x) \neq 0 \text{ при } x \in [a, b],$$

то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$  при таком вы-

боре  $x_0$ , что  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . В качестве  $x_0$  удобно взять в этом случае соответствующий конец промежутка  $[a, b]$ .

Идея метода Ньютона основана на том, что уравнение  $f(x) = 0$  на каждом шаге приближенно заменяется линейным уравнением. Геометрически этому соответствует проведение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и нахождение точки  $x_1$  ее пересечения с осью  $x$ , затем проведение касательной в точке  $x_1$  и нахождение точки  $x_2$  ее пересечения осью  $x$  и т. д. (рис. 10.7). Сходимость приближений в методе Ньютона чрезвычайно быстрая (сходимость ускоряется по мере приближения к корню). Метод Ньютона пригоден и для вычисления комплексных корней. К недостаткам метода сле-

дует отнести большую чувствительность к выбору начального приближения, а также необходимость вычислять производную на каждом шаге процесса.

### Пример

Уравнение  $x^3 - 3x + 1 = 0$ . График левой части изображен на рис. 5.10. Видно, что имеются три действительных корня  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , причем

$$-2 < \xi_1 < -1, \quad 0 < \xi_2 < 1, \quad 1 < \xi_3 < 2.$$

Для вычисления  $\xi_1$  можно взять (в соответствии с достаточными условиями)  $x_0 = -2$ , для  $\xi_2$  взять  $x_0 = 0,1$ , для  $\xi_3$  взять  $x_0 = 2$ . Результат вычисления корней (во всех случаях пять приближений):

$$\xi_1 \approx -1,879385241, \quad \xi_2 \approx 0,3472963553, \quad \xi_3 \approx 1,532088886.$$

Погрешность не превышает  $10^{-9}$ .

## 10.5. Приближенное решение дифференциальных уравнений

1°. Метод Эйлера (метод ломаных) — простейший метод приближенного решения задачи Коши (п. 5.5.3°) для дифференциального уравнения  $y' = f(x, y(x))$  при начальном условии  $y(x_0) = y_0$ . Для вычисления  $y_1$  — при-

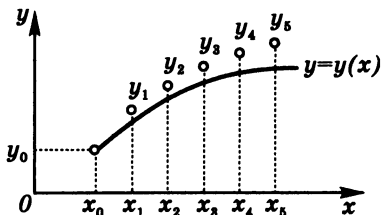


Рис. 10.8.

К методу Эйлера

ближенного значения решения  $y(x)$  в точке  $x_1 = x_0 + h$ , где  $h$  — шаг интегрирования, — из формулы Тейлора (10.1) получаем расчетную формулу (линейное приближение)  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ . Аналогично в точке  $x_2 = x_1 + h$  для  $y_2 \approx y(x_2)$  имеем  $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$  и т. д. Последовательность значений приближенного решения в точках  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) вычисляется по рекуррентной формуле

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

В результате вместо точного графика решения  $y = y(x)$  получается последовательность точек  $(x_k, y_k)$  на плоскости  $xy$ , близкая к графику, если  $h$  — достаточно малое число (рис. 10.8). Метод Эйлера очень прост, но точность его невелика: порядок погрешности  $h^2$  при  $h \rightarrow 0$ .

2°. Метод Рунге — Кутты значительно точнее метода Эйлера. Приближенное значение  $y_1$  в точке  $x_1 = x_0 + h$  для решения  $y(x)$  дифференциального уравнения  $y' = f(x, y(x))$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  вычисляется по следующей схеме:

$$\begin{aligned} p_1 &= hf(x_0, y_0), & p_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}p_1\right), \\ p_3 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}p_2\right), & p_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + p_3), \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4). \end{aligned}$$

Аналогично последовательно вычисляются  $y_2, y_3, \dots, y_n$  соответственно в точках  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Порядок погрешности метода Рунге — Кутты:  $h^5$  при  $h \rightarrow 0$ . В большинстве случаев для численного решения дифференциальных уравнений пользуются методом Рунге — Кутты (или одной из его модификаций).

## 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методы теории вероятностей широко применяются в статистической физике, квантовой механике, математической физике, при математической обработке результатов измерений, а также во многих задачах радиосвязи, передачи информации, экономики, статистики, страхового дела, массового обслуживания.

### 11.1. Случайные события и их вероятности

1°. Событие, которое при заданном комплексе условий может произойти или не произойти, называется *случайным событием*. Так, дождь 1 июля в Москве; выпадение герба или цифры при бросании монеты на стол; выпадение грани с четной

цифрой при бросании игральной кости (кубика с занумерованными гранями) — примеры случайных событий. Ответ на вопрос, считать ли данное событие случайным, зависит от имеющейся информации. Например, появление поезда на станции в промежутке времени от  $18^{00}$  до  $18^{10}$  — событие случайное с точки зрения пассажира, не знающего расписания, и неслучайное для пассажира, знающего расписание. В опыте с бросанием монеты, если знать с достаточной точностью массу, начальные координаты и скорость монеты, можно (в принципе) рассчитать ее траекторию и, следовательно, предсказать, какой из двух сторон она упадет на стол.

*Достоверное событие* не может не произойти (например, выпадение не менее одного очка при бросании кости); *невозможное* событие не может произойти (например, выпадение семи очков). Два события называются *несовместными*, если появление их обоих (в данном опыте) невозможно. Например, при одном бросании кости появление не менее трех очков и при этом появление четной грани — события совместные, а появление цифры 3 и при этом появление четной грани — события несовместные.

2°. С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в своей повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий. *Вероятность события*  $A$  — число  $P(A)$ , характеризующее возможность появления этого события. По определению,  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах.

В некоторых простейших ситуациях вероятность случайного события можно указать сразу: при бросании (симметричной!) монеты естественно считать оба возможных исхода (герб или цифра) имеющими равную вероятность, т. е. 0,5, или 50%. При бросании игральной кости появление любой цифры от 1 до 6 — равновероятные события, с вероятностью  $1/6$  каждое. Вообще, если данный опыт может иметь  $n$  исходов и нет оснований считать появление какого-либо исхода более вероят-

ным, чем другие, полагают вероятность каждого исхода равной  $1/n$ . Если событие  $A$  происходит в результате одного из  $m$  равновероятных исходов, то  $P(A) = m/n$ . Например, появление нечетной грани при бросании кости (событие  $A$ ) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т. е. здесь  $m = 3$ , поэтому  $P(A) = 3/6 = 1/2$ . Рассчитанную таким образом вероятность называют *априорной*. В более сложных ситуациях (например, в статистической физике) расчет вероятностей каких-либо случайных событий может производиться на основании предположений о законах, управляющих деталями соответствующих процессов (п. Ф3.3.1°).

*Суммой событий  $A$  и  $B$*  (обозначается  $A + B$ ) называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из двух событий  $A$  или  $B$ . Аналогично определяется сумма большего числа событий. Например, появление четной грани кости есть сумма трех событий: выпадение 2, или 4, или 6.

*Произведением событий  $A$  и  $B$*  (обозначается  $A \cdot B$ ) называется событие, состоящее в появлении обоих событий  $A$  и  $B$ . Например, пусть при бросании двух монет появление герба на первой монете — событие  $A$ , появление герба на второй монете — событие  $B$ ; тогда произведение  $A \cdot B$  — это появление гербов на обеих монетах. Произведение несовместных событий — событие невозможное. Сумма и произведение событий аналогичны соответственно объединению и пересечению множеств (п. 2.1.1°).

Вероятность суммы  $A + B$  несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$ :

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (11.1)$$

### Пример

Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком 0,5. Оба стрелка стреляют по команде (т. е. одновременно)

один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Пусть  $A$  есть попадание в цель первым стрелком,  $B$  — вторым стрелком,  $A + B$  — поражение цели хотя бы одним стрелком,  $A \cdot B$  — поражение цели обоими стрелками. По формуле (11.1) имеем

$$P(A + B) = 0,8 + 0,5 - P(A \cdot B).$$

В данном примере можно считать события  $A$  и  $B$  независимыми (см. ниже), поэтому

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4.$$

Ответ:  $P(A + B) = 0,9$ .

*Условная вероятность* — вероятность появления события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , — обозначается  $P(A|B)$ . Вероятность произведения событий вычисляется с помощью условных вероятностей по формуле

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (11.2)$$

### Пример

В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Появление первого черного шара (событие  $A$ ) имеет, очевидно, вероятность  $P(A) = 5/12$ . Если первый шар оказался черным, то условная вероятность события  $B$  — появления второго черного шара (при условии, что первый шар был черным) — равна  $P(B|A) = 4/11$ , так как перед выниманием второго шара осталось 11 шаров, из них 4 черных. Вероятность вынуть 2 черных шара подряд можно подсчитать по формуле (11.2):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}.$$

События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если условная вероятность  $P(A|B)$  равна вероятности  $P(A)$ . Другими словами, для независимых событий появление одного из них не влияет на вероятность появления другого. Так, в предыдущем примере вероятность появления второго черного шара не зависела бы от цвета вынутого первого шара, если, вынув первый шар, мы положили бы его обратно в ящик. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

На практике независимые события встречаются очень часто, так как причинная связь явлений во многих случаях отсутствует или несущественна.

### Пример

Производят  $n$  бросаний монеты. Результат каждого бросания — случайное событие, вероятность которого естественно считать не зависящей от результатов других бросаний, поэтому результаты этих  $n$  испытаний можно считать независимыми событиями.

3°. Если производится  $n$  независимых испытаний с двумя возможными исходами каждое:  $A$  и не  $A$ , при неизменных внешних условиях, так что вероятность  $P(A)$  неизменна и равна  $p$ , то вероятность  $P_{m,n}$  того, что событие  $A$  появится  $m$  раз, подсчитывается по *формуле Бернулли (биномиальное распределение)*:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  по  $m$  (п. 6.1.6°). Формула Бернулли применяется, в частности, в физике (п. Ф3.3.6°).

### Пример

Монету бросают  $n = 2m$  раз. Какова вероятность того, что герб появится  $m$  раз?

По формуле Бернулли

$$P_{m,2m} = C_{2m}^m \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$

т. е.

$$P_{1,2} = 0,5 \text{ при } m = 1; \quad P_{2,4} = 0,375 \text{ при } m = 2;$$

$$P_{5,10} \approx 0,25 \text{ при } m = 5, \text{ и т. д.}$$

При больших  $m$  и  $n$  из формулы Бернулли с помощью формулы Стирлинга для факториала (§ 6.1) можно получить приближенную формулу (*распределение Гаусса или нормальное распределение*)

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

где

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}, \quad x = \frac{m-np}{\sigma}.$$

При малых  $p$  более точное значение дает *формула Пуассона*

$$P_{m,n} \approx \frac{y^m}{m!} e^{-y}, \text{ где } y = np.$$

### Пример

Станок-автомат выпускает гвозди, причем вероятность появления бракованного гвоздя  $p = 0,1\%$ . Какова вероятность получения не более двух бракованных гвоздей в серии из 1000 штук?

Рассмотрим серии трех типов: без брака, с одним и с двумя бракованными гвоздями; тогда искомая вероятность

$$Q = P_{0,1000} + P_{1,1000} + P_{2,1000}.$$

По формуле Пуассона ( $y = 1$ ) получаем

$$Q \approx e^{-1}(1 + 1 + 0,5) = 2,5e^{-1} \approx 92\%.$$

4°. Отношение  $\mu = m/n$  числа  $m$  появлений событий  $A$  при  $n$  испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом  $n$  частота события в определенном смысле приближается к вероятности  $p$  этого события. Именно, пусть производятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность со-



бытия  $A$  неизменна и равна  $p$ . Справедливо следующее утверждение: для любого  $\varepsilon > 0$  вероятность отклонения частоты от  $p$  на величину, меньшую  $\varepsilon$ , при  $n \rightarrow \infty$  приближается к единице, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mu - p| < \varepsilon) = 1. \quad (11.3)$$

Это утверждение называется *законом больших чисел* или *теоремой Бернулли*. Соотношение (11.3) означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события  $A$  от его вероятности меньше любого наперед заданного положительного числа. Так, много раз бросая монету, мы «почти наверняка» будем получать примерно равные частоты выпадений герба и цифры.

## 11.2. Случайные величины и их распределения

1°. *Случайная величина* — переменная величина, конкретное значение которой зависит от случая. Например, температура воздуха в 12 часов дня 1 июля в Москве, номер грани, выпадающий при бросании кости, скорость молекулы газа в данный момент времени и т. д.

Для характеристики случайной величины нужно знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют *закон распределения* случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями  $1/6$  для каждого значения от 1 до 6. Множество возможных значений *дискретной* случайной величины конечно (или счетно). Встречаются также *непрерывные* случайные величины, возможные значения которых заполняют всю числовую ось (или некоторые интервалы).

Непрерывную случайную величину  $A$  следует задавать не указанием вероятностей ее отдельных значений, а непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией  $\rho(x)$ , называемой *плотностью распределения* вероятностей случайной ве-

личины  $A$ . При этом вероятность того, что значения  $A$  находятся в промежутке от  $x$  до  $x + \Delta x$ , равна

$$P = \int_x^{x+\Delta x} \rho(\xi) d\xi.$$

При малой длине промежутка, т. е. при  $\Delta x \approx 0$ , вероятность попадания значения  $A$  в этот промежуток приблизительно равна  $\rho(x) \cdot \Delta x$ . В статистической физике принято  $\rho(x)$  называть *функцией распределения* случайной величины (п. Ф3.3.3°).

Свойства плотности распределения:

- 1)  $\rho(x) \geq 0$ ;
- 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1$ .

Свойство 2) называется *условием нормировки* распределения.

В физике часто встречается *нормальное распределение* или *распределение Гаусса* (§ Ф3.3), для которого

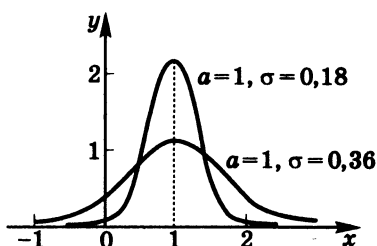


Рис. 11.1.  
Плотность нормального  
распределения

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (11.4)$$

Графики функции (11.4) приведены на рис. 11.1. Нормальное распределение имеют, в частности, случайные погрешности измерений.

**2°.** Математическое ожидание и дисперсия случайной величины — наиболее важные ее характеристики. *Математическое ожидание* дискретной случайной величины, принимающей значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с равными вероятностями  $p = 1/n$ , определяется как среднее арифметическое этих значений:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

В общем случае дискретной случайной величины  $A$ , принимающей значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , математическое ожидание определяется как «среднее взвешенное», т. е.

$$\langle A \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (11.5)$$

Для непрерывной случайной величины  $A$  с плотностью распределения  $\rho(x)$  имеем

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) x dx. \quad (11.6)$$

### Пример

Пусть в некоторой лотерее на каждый билет вероятность выиграть 10 руб. — 3%, 100 руб. — 0,5%, 1000 руб. — 0,01%, других выигрышей нет. Каков средний выигрыш в лотерее (на один билет)?

Средний выигрыш подсчитывается как математическое ожидание по формуле (11.5); он равен

$$0,03 \cdot 10 + 0,005 \cdot 100 + 0,0001 \cdot 1000 = 0,90 \text{ руб.}$$

Пример вычисления средней скорости молекулы газа см. в п. Ф3.3.3°.

*Дисперсия* случайной величины  $A$  определяется как математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее среднего значения:

$$D(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle.$$

Для дискретной случайной величины

$$D(A) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \langle A \rangle)^2;$$

для непрерывной случайной величины

$$D(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) (x - \langle A \rangle)^2 dx.$$

Здесь, как и в формуле (11.6), предполагается сходимость соответствующего несобственного интеграла. Свойство дисперсии:

$$D(A) = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

Дисперсия характеризует меру разброса случайной величины около ее среднего значения. Для детерминированной величины  $A$ , принимающей только одно значение  $x_0$ , математическое ожидание равно  $x_0$ , а дисперсия равна нулю.

Физический смысл дисперсии: параметр  $\sigma = \sqrt{D(A)}$  служит мерой флуктуации физической величины  $A$  (п. Ф3.3.6°). Например, в выделенном объеме газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, число молекул  $n$  — случайная величина. При заданном среднем значении  $\langle n \rangle = n_0$  флуктуация числа молекул равна

$$\delta n = \sqrt{\langle (n - n_0)^2 \rangle},$$

т. е. корню из дисперсии величины  $n$ . Можно показать, что с увеличением  $n_0$  значение  $\delta n$  растет как  $\sqrt{n_0}$ , а относительная флуктуация  $\delta n/n_0$  убывает как  $1/\sqrt{n_0}$ .

## 12. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрицы и определители часто используются в различных задачах физики, математики, экономики, метеорологии, сейсмологии и в других областях.

### 12.1. Матрицы

1°. *Матрица* — это прямоугольная таблица, состоящая из чисел, которые называются *элементами* матрицы. Числа допускаются как действительные (§ 2.2), так и комплексные (§ 7.1). Элементы записывают в *строках* и *столбцах*. Например, матрица с 12 элементами

$$\left\| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 3,2 \\ 3 & 3,14 & -7 & 0 \\ \pi & 5 & a & -2 \end{array} \right\|$$

состоит из трех строк и четырех столбцов. Двойные вертикальные линии указывают на то, что все двенадцать чисел следует рассматривать как единый объект — матрицу.

*Пример* применения матриц для хранения информации: предположим, что в течение 7 дней измеряли температуру воздуха 12 раз в день с интервалами в 1 час. Можно записать эти 84 значения температуры в виде матрицы из 7 строк и 12 столбцов (или наоборот).

В общем случае матрица, имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов, содержит  $mn$  элементов. Для обозначения матриц используют обычно заглавные буквы, например,

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad \text{или} \quad A = \|a_{ik}\|.$$

Здесь матрица  $A$ , имеющая  $m$  строк и  $n$  столбцов (или, короче, матрица размера  $m \times n$ ), состоит из элементов  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ...,  $a_{mn}$ , при этом  $a_{ik}$  означает элемент, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца. Номер строки ( $i$ ) и номер столбца ( $k$ ) называют *индексами* элемента  $a_{ik}$ . Нумерация строк — сверху вниз, столбцов — слева направо. Таким образом,  $a_{12}$  — это элемент с двойным номером (1;2), а не с одним номером 12.

Если  $m = n = 1$ , знаки  $\| \ \|$  опускают, при этом матрица состоит из одного элемента,  $A = a_{11}$ . Иногда бывают полезны так называемые матрица-строка ( $m = 1$ ) и матрица-столбец ( $n = 1$ ). Например, координаты  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  трехмерного вектора  $\vec{a}$  (см. п. 8.1.2°) можно записать в строку (матрица-строка, или вектор-строка) или в столбец (матрица-столбец, или вектор-столбец). Векторный смысл можно придавать матрицам-строкам (и матрицам-столбцам) и при числе элементов, большем трех.

**2°.** Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, т. е.  $m = n$ , называется *квадратной* матрицей. *Диагональные* элементы квадратной матрицы — это те элементы, у которых индексы равны, т. е.  $i = k$ . Эти элементы образуют *главную*

*диагональ* матрицы. Например, числа  $a$  и  $d$  находятся на главной диагонали матрицы

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

*Диагональная* матрица — это квадратная матрица, все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю, т. е.  $a_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ .

*Единичная* матрица (обозначается  $I$  или  $E$ ) — это диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, т. е.  $a_{ii} = 1$ ,  $a_{ik} = 0$ ,  $i \neq k$ ,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Нулевая* матрица состоит только из нулей.

### 3°. Действия с матрицами.

1) Равенство матриц: две матрицы  $A$  и  $B$  одинаковых размеров  $m \times n$  равны ( $A = B$ ) если равны все их соответствующие элементы:

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n.$$

2) Сложение матриц: равенство  $C = A + B$  означает, что

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \quad \text{при } i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n,$$

т. е. элементы суммы двух матриц (одинаковых размеров!) равны суммам соответствующих элементов.

**Пример**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3) Умножение на число: пусть  $\gamma$  — число,  $A$  — матрица с элементами  $a_{ik}$ . Матрица  $\gamma A$  имеет элементы  $\gamma a_{ik}$ , т. е. все элементы матрицы  $A$  умножаются на данное число.

Пример

$$3 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 24 & 3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}.$$

4) Умножение двух матриц: пусть  $A$  — матрица  $m \times n$ ,  $B$  — матрица  $n \times p$ . Произведение  $C = A \cdot B$  (точку можно не писать) вычисляется следующим образом:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \text{при } i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p. \quad (12.1)$$

В развернутом виде эта формула выглядит так:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk},$$

т. е. по очереди берут 1-й элемент строки номер  $i$  матрицы  $A$  и умножают его на 1-й элемент столбца номер  $k$  матрицы  $B$ , затем 2-й элемент  $i$ -й строки матрицы  $A$  умножают на 2-й элемент  $k$ -го столбца матрицы  $B$ , и т. д., и затем все такие произведения складывают.

Это правило называется «строка на столбец». Оно аналогично правилу вычисления скалярного произведения двух векторов по их координатам (п. 8.2.1°).

В случае квадратных матриц  $n \times n$  правило умножения имеет вид

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad \text{при } i, k = 1, \dots, n.$$

Примеры

$$1) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & t \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a - b & at + 5b \\ 3c - d & ct + 5d \end{vmatrix};$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;$$

$$4) \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}.$$

Умножение матриц:

а) ассоциативно:  $(AB)C = A(BC)$ ;

б) дистрибутивно:  $(A + B)C = AC + BC$ ;

в) некоммукативно: вообще говоря,  $AB \neq BA$ .

Если  $AB = BA$ , то говорят, что матрицы  $A$  и  $B$  *коммутируют*. Диагональные матрицы коммутируют друг с другом.

Единичная матрица действует при умножении так же как число 1:

$$IA = AI = A.$$

5) Если 1-ю строку матрицы  $A$  записать «вертикально», т. е. расположить элементы 1-й строки в виде 1-го столбца, затем 2-ю строку в виде 2-го столбца и т. д., то получится *транспонированная* матрица (обозначается  $A^*$  или  $A^T$ ). Очевидно, элементы  $A$  и  $A^*$  связаны соотношением:

$$a_{ik}^* = a_{ki}.$$

Пример

$$\begin{vmatrix} p & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 70 \end{vmatrix}^* = \begin{vmatrix} p & 2 \\ -1 & \alpha \\ 0 & 70 \end{vmatrix}.$$

4°. Обратная матрица. Пусть  $A$  — квадратная  $n \times n$  матрица. Если  $n \times n$  матрица  $B$  такова, что

$$BA = I,$$

то  $B$  называют обратной матрицей для  $A$  и пишут:  $B = A^{-1}$ . Справедливы равенства:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad (BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}.$$

Матрица  $A$  *обратима* (т. е. имеет обратную) тогда и только тогда, когда определитель  $A$  (см. § 12.2) не равен нулю. О вычислении обратной матрицы см. п. 12.2.4°.





нений называют в этом случае квадратной. *Пример:* системы из двух уравнений с двумя неизвестными и из трех уравнений с тремя неизвестными в § 3.6.

Если квадратная матрица  $A$  не вырождена, т. е. ее определитель (см. 12.2) не равен нулю, то система (12.3) при любом задании правых частей  $b_1, b_2, \dots, b_n$  имеет единственное решение, которое можно вычислить по *формулам Крамера* (для  $n = 2$  см. п. 3.6.1°):

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \text{где } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (12.4)$$

а определитель  $\Delta_i$  получается из  $\Delta$  заменой столбца номер  $i$  на столбец правых частей, например:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (12.5)$$

Решение квадратной системы (12.3) в случае  $\det A \neq 0$  можно также записать с помощью обратной матрицы (п. 4° и п. 12.2.4°):

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}.$$

На практике удобнее решать системы методом Гаусса.

## 12.2. Определители

1°. Каждой квадратной матрице можно сопоставить число, называемое *определителем* матрицы. Определитель вычисляется по правилам, изложенным в п. 12.2.2°. Определитель матрицы  $A$  с элементами  $a_{ik}$  обозначается несколькими способами:

$$\det A, \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ или } \det \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ или } \det \|a_{ik}\|.$$

Определитель  $n \times n$  матрицы называют определителем  $n$ -го порядка.

2°. При  $n = 1$ , когда матрица  $A = a_{11}$  — одно число, определитель равен этому числу,

$$\det a_{11} = a_{11}.$$

При  $n = 2$ , т. е. для матрицы  $2 \times 2$ , определитель вычисляется по правилу (§ 3.2):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (12.6)$$

При  $n = 3$ , т. е. для матрицы  $3 \times 3$ , определитель вычисляется по правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot m_{12} - a_{12} \cdot m_{12} + a_{13} \cdot m_{13}, \quad (12.7)$$

где

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Числа  $m_{1k}$  называются *минорами* соответствующих элементов  $a_{ik}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Минор элемента  $a_{1k}$  получается из исходного определителя элемента вычеркиванием  $a_{1k}$  вместе с его строкой и столбцом.

Например,

$$m_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-4) = 0.$$

При  $n = 4$ , т. е. для матрицы  $4 \times 4$ , определитель вычисляется по аналогичному правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} - a_{14}m_{14}, \quad (12.8)$$

где  $m_{1k}$  — минор элемента  $a_{1k}$ , т. е. определитель 3-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием элемента  $a_{1k}$  вместе с его строкой и столбцом.

В общем случае определитель матрицы  $n \times n$  вычисляется аналогично с помощью миноров порядка  $(n - 1)$ :

$$\det A = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}m_{1n} =$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k}a_{1k}m_{1k}. \quad (12.9)$$

Тот же результат получается, если вместо 1-й строки взять любую строку:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k}a_{ik}m_{ik}, \quad i = 1, \dots, n$$

или любой столбец:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k}a_{ik}m_{ik}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, вычисление определителя  $n$ -го порядка сводится к вычислению  $n$  определителей порядка  $(n - 1)$ , которые в свою очередь сводятся к вычислению определителей порядка  $(n - 2)$  и т. д., до порядков 2 и 1. Следует отметить, что с ростом  $n$  трудоемкость такого вычисления стремительно возрастает. Существуют гораздо более экономичные способы вычисления определителей, основанные на их свойствах.

**3°. Свойства определителей:**

1) при транспонировании матрицы определитель не меняется:

$$\det A^* = \det A;$$

2) при умножении всех элементов какой-либо строки (или столбца) на число  $\gamma$  определитель умножается на это число, например:

$$\begin{vmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} & \dots & \gamma a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

3) если какие-либо две строки (или два столбца) поменять местами, то определитель изменит знак, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

4) определитель, содержащий две одинаковые строки (или два одинаковых столбца), равен нулю;

5) если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю;

6) если ко всем элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \gamma a_{11} & \dots & a_{2n} + \gamma a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

7) определитель произведения матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}. \text{ Здесь ко второму столбцу}$$

прибавлен первый столбец. Теперь к третьему столбцу прибавим первый столбец, умноженный на  $(-2)$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 24.$$

Цель такого рода преобразований — получить как можно больше нулей в какой-либо строке (или столбце), тогда в сумме вида (12.9) останется мало ненулевых слагаемых.

4°. Элементы обратной матрицы вычисляются по формуле Крамера:

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+k} m_{ki}, \quad (12.10)$$

где  $m_{ki}$  означает минор элемента  $a_{ki}$ . Обратная матрица существует при условии, что  $\det A \neq 0$ .

Пример

$$\text{Найдем обратную матрицу для } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Решение: } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$(A^{-1})_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(A^{-1})_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{-2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ и так далее.}$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{vmatrix}.$$

5°. Пусть  $A$  — матрица, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Будем вычеркивать строки и столбцы, оставляя «частичные» квадратные матрицы меньших размеров. Определители таких частичных матриц называются *минорами* матрицы  $A$ . Для квадратной  $n \times n$  матрицы  $A$  ее определитель  $\det A$  включим в множество миноров.

*Определение.* Если среди миноров порядка  $r$  имеется хотя бы один минор не равный нулю, а все миноры порядка  $(r + 1)$  равны нулю, то число  $r$  называется *рангом матрицы*.

Пример

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

все четыре минора 3-го порядка нулевые, следовательно, ранг  $r = 2$ .

Ранг матрицы — весьма важная ее характеристика, так как ранг совпадает с количеством линейно независимых строк и линейно независимых столбцов. Последнее означает, что если со строками производить такие же действия, как в методе Гаусса (п. 3.6.2°), то в результате останется ровно  $r$  ненулевых строк, а остальные  $(n - r)$  строк превратятся в нулевые. Это положение справедливо и в отношении столбцов.

Пример

Покажем стрелками преобразования матрицы  $A$  из предыдущего примера:

$$A \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь сначала из 2-й строки вычли удвоенную 1-ю строку, а из 3-й — утроенную 1-ю, затем из 3-й строки вычли 2-ю строку. Ранг при этом не изменился, и очевидно, что он равен 2, так как все миноры порядка три содержат нулевую строку и поэтому равны нулю.

Таким образом, для нахождения ранга матрицы полезно сначала упростить ее по методу Гаусса.

*Теорема Кронекера-Капелли:* система линейных уравнений имеет решение в том и только в том случае, когда ранг матрицы ее коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.

Расширенная матрица  $\hat{A}$  получается из матрицы  $A$  коэффициентов  $a_{ik}$  приписыванием справа столбца правых частей  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

### Пример

Изучить систему при различных значениях  $b_1, b_2, b_3$ :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & + 4x_4 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 = b_3 \end{cases}$$

*1-й случай:*  $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1$ . Ранг матрицы  $A$  системы уравнений равен 2 (см. предыдущий пример). Составим и затем упростим расширенную матрицу  $\hat{A}$ :

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 6 & 1 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -6 & -2 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|.$$

Видно, что ранг  $\hat{A}$  равен 3, так как минор 3-го порядка

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = (-1) \cdot (-5) \neq 0.$$

Следовательно, система не имеет решений.

*2-й случай:*  $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$ . Те же преобразования приводят к результату: ранг  $\hat{A} = 2$ , значит, система разрешима. Фактически получилось всего два независимых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & + 4x_4 = 1 \\ & -5x_2 - x_3 - 6x_4 = -1 \end{cases},$$

$$\text{откуда } \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4 \end{cases}.$$



Неизвестные  $x_3$  и  $x_4$  произвольны, неизвестные  $x_1$  и  $x_2$  выражаются через них. Таким образом, существует бесконечное множество решений.

### 12.3. Собственные числа матриц и квадратичные формы

В этом параграфе рассматриваются квадратные матрицы размера  $n \times n$ .

1°. Составим *характеристический многочлен* матрицы  $A$ :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (12.11)$$

Здесь из каждого диагонального элемента вычли число  $\lambda$ . Выражение (12.11) представляет собой многочлен степени  $n$  от переменной  $\lambda$ . Как известно (п. 3.3.5°), корни многочлена  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (среди них могут быть равные) на комплексной плоскости (см. главу 7) всегда существуют. Корни характеристического многочлена матрицы называются *характеристическими*, или *собственными*, числами этой матрицы.

Итак, собственные числа матрицы  $A$  — это решения алгебраического уравнения  $n$ -й степени

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (12.12)$$

Это уравнение называют *характеристическим* (иногда — *вековым*) уравнением.

**Примеры**

$$1) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4,$$

$\lambda = 1 \pm 2$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$ , корни действительные;

$$2) A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4,$$

$\lambda = 1 \pm 2i$ ,  $\lambda_1 = 1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 1 - 2i$ , корни комплексные (глава 7);

$$3) A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2,$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ , два равных корня, или один двукратный корень.

**2°.** Пусть  $\lambda_1$  — какое-нибудь собственное число матрицы  $A$ . Квадратная линейная система

$$(A - \lambda_1 I) \vec{x} = \vec{0} \quad (12.13)$$

имеет, кроме очевидного нулевого решения  $\vec{x} = \vec{0}$ , еще и ненулевые решения, поскольку  $\det(A - \lambda_1 I) = 0$  и, следовательно, число независимых уравнений меньше чем  $n$ , и имеется произвол в выборе хотя бы одного из неизвестных.

Например, для  $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$  система (12.13) примет вид:

$$1) \text{ при } \lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ или } \begin{cases} -2x + 2y = 0; \\ 2x - 2y = 0; \end{cases}$$

$$2) \text{ при } \lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \text{ или } \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Видно, что в обоих случаях второе уравнение фактически совпадает с первым и его можно отбросить. Значит, можно произвольно задать, скажем,  $y = \alpha$  и выразить  $x$  через него. Тогда в случае  $\lambda = 3$  будет  $\vec{x} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ , а в случае  $\lambda = -1$  будет  $\vec{x} = \begin{vmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ . Выбор  $\alpha$  произволен, можно взять, например,  $\alpha = 1$ .

Каждое ненулевое решение  $\vec{x}$  системы (12.13) называется *собственным вектором* матрицы, соответствующим собственному числу  $\lambda_1$ . В данном примере собственному числу  $\lambda = 3$  соответствует собственный вектор  $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ , а  $\lambda = -1$  вектор  $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ .

3°. Если собственные векторы (обозначим их  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n$ ) образуют *базис* в пространстве  $E_n$  векторов-столбцов «высоты»  $n$ , то тогда матрица  $T$ , составленная из этих векторов (как из столбцов), приводит матрицу  $A$  к *диагональному виду*:

$$T^{-1}AT = \Lambda, \quad \text{где } \Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}. \quad (12.14)$$

Термин «базис» означает, что любой вектор из пространства  $E_n$  можно разложить по базисным векторам  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n$  и притом единственным образом. В трехмерном пространстве ( $n = 3$ ) базисом служит, например, тройка ортов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  (п. 8.1.3°), или любая тройка некопланарных векторов (п. 8.1.1°). Векторы-столбцы  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n$  образуют базис в том случае, когда определитель матрицы  $T$ , составленной из этих столбцов, не равен нулю.

### Пример

Для матрицы  $A$  из примера 1 собственные векторы  $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$  образуют базис, так как здесь  $T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\det T = 2 \neq 0$ .

Согласно (12.14) тогда будет справедливо равенство

$$T^{-1}AT = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

*Замечание.* В этом примере  $T^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ .

**Теорема 1.** Если матрица размера  $n \times n$  имеет  $n$  различных собственных чисел, то ее собственные векторы образуют базис.

*Теорема 2.* Если матрица  $A$  вещественна (т. е. все ее элементы действительные числа) и симметрична (т. е.  $A^* = A$ ), то все собственные числа действительные, а собственные векторы образуют базис.

*Замечание.* Если матрица несимметрична, и при этом среди собственных чисел имеются кратные, то может оказаться, что базиса из собственных векторов не существует, и тогда матрица не приводится к диагональному виду (12.14).

4°. Для вещественных матриц введем понятие квадратичной формы. *Квадратичной формой* матрицы  $A = \|a_{ik}\|$  называется выражение

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (12.15)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — действительные числа. Таким образом, квадратичная форма — это функция от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , имеющая специальный вид — это однородный многочлен 2-й степени.

### Пример

Выражение  $3x^2 - 4xy + 2y^2$  есть квадратичная форма, соответствующая матрице

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{array} \right\|.$$

*Замечание.* По данной квадратичной форме матрица  $A$  восстанавливается неоднозначно, так как  $x_i x_k = x_k x_i$ . Напри-

мер, в данном примере можно положить  $A = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{array} \right\|$  или

$$A = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{array} \right\|.$$

5°. Применение квадратичных форм. Уравнение кривой 2-го порядка на плоскости имеет общий вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (12.16)$$

В частности, при  $A = 1/a^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1/b^2$ ,  $D = E = 0$ ,  $F = -1$  получается уравнение эллипса (п. 9.3.2°); при  $A = 1/a^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = -1/b^2$ ,  $D = E = 0$ ,  $F = -1$  получается уравнение гиперболы (п. 9.3.3°); при  $A = B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = -p$ ,  $E = 0$ ,  $F = 0$  получается уравнение параболы (п. 9.3.4°).

Уравнение поверхности 2-го порядка в трехмерном пространстве имеет общий вид

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}x_i x_k + 2 \sum_{k=1}^3 b_k x_k + c = 0, \quad (12.17)$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Например, если  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ , остальные  $a_{ik}$  и все  $b_k$  равны нулю, и  $C = -R^2$ , то получаем уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Известны три основных типа поверхностей 2-го порядка:

- 1) эллипсоид:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , в частности, сфера;
- 2) гиперболоид:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  и  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;
- 3) параболоид:  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  и  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ .

**6°.** Одна из важных задач в теории квадратичных форм: приведение квадратичной формы к *каноническому виду*. Это означает, что с помощью *линейной замены переменных*

$$x_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} \xi_k \quad (12.18)$$

требуется преобразовать выражение (12.15) к виду

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ii} \xi_i^2, \quad (12.19)$$

т. е. за счет подстановки (12.18) записать данную функцию в виде суммы квадратов новых переменных с некоторыми коэффициентами (т. е. «избавиться» от произведений перемен-

ных). Преобразование (12.18) должно быть невырожденным, т. е.  $\det T \neq 0$ .

Оказывается, такое упрощение возможно сделать многими способами. При этом, если в качестве приводящей матрицы  $T$  взять «ортогональную» матрицу, составленную из собственных векторов-столбцов симметричной матрицы  $A$ , то канонический вид квадратичной формы выражается через собственные числа  $\lambda_i$  матрицы  $A$ :

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2. \quad (12.20)$$

Термин «ортогональная» матрица означает, что выполняется равенство  $T^* = T^{-1}$ , что равносильно равенству  $TT^* = I$ . В свою очередь, это равносильно ортонормированности столбцов матрицы  $T$ , т. е. попарной их ортогональности и нормировке на 1 каждого столбца.

Пример

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| - \text{ортогональная матрица.}$$

Геометрический смысл замены (12.18) в случае ортогональной матрицы  $T$  — поворот системы координат (возможно, с отражением).

Примеры

$$1) \Phi = 3x^2 + 2xy + 3y^2, \quad A = \left\| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right\|, \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2.$$

$$T = \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\|, \quad \Phi = 4\xi^2 + 2\eta^2, \quad \begin{cases} x = (\xi - \eta)/\sqrt{2} \\ y = (\xi + \eta)/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Это преобразование означает поворот осей координат на угол  $45^\circ$ .

Кривая, заданная на плоскости  $xy$  уравнением

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0,$$

в новых координатах  $\xi, \eta$  описывается уравнением

$$4\xi^2 + 2\eta^2 = 1,$$

это эллипс (п. 9.3.2°) с полуосями  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис. 12.1);

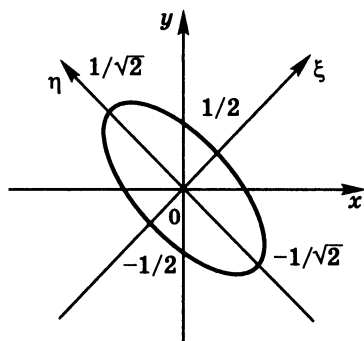


Рис. 12.1.  
Эллипс

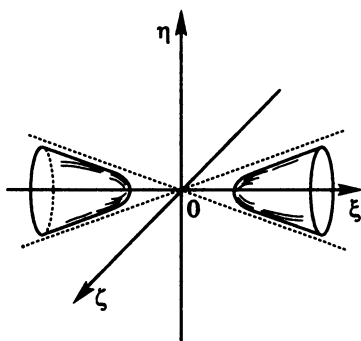


Рис. 12.2.  
Гиперboloид

$$2) \Phi = 2xy + 2yz + 2xz, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

$$T = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix},$$

$$\Phi = 2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2, \quad \begin{cases} x = \xi/\sqrt{3} + \eta/\sqrt{2} + \zeta/\sqrt{6} \\ y = \xi/\sqrt{3} - 2\zeta/\sqrt{6} \\ z = \xi/\sqrt{3} - \eta/\sqrt{2} + \zeta/\sqrt{6} \end{cases}.$$

Поверхность в трехмерном пространстве, описываемая уравнением

$$2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0,$$

в новых координатах  $\xi, \eta, \zeta$  имеет уравнение

$$2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = 1,$$

это двухполостный гиперболоид вращения (рис. 12.2). Такая поверхность может быть получена вращением вокруг оси  $\xi$  гиперболы  $2\xi^2 - \zeta^2 = 1$ .

**7°. Закон инерции квадратичной формы:** в результате приведения квадратичной формы к каноническому виду различными линейными преобразованиями, число положительных и число отрицательных коэффициентов в каноническом виде (12.19) не зависит от выбора преобразования.



# ФИЗИКА

---

## 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ РАЗМЕРНОСТИ И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Изучаемые физикой закономерности лежат в основе всего естествознания. Физика относится к точным наукам, т. е. ее законы допускают количественную формулировку. Законы физики базируются на фактах, установленных опытным путем — с помощью экспериментов, в которых производятся различные измерения.

Единицы физических величин делятся на системные (т. е. входящие в какую-либо систему единиц) и внесистемные (например, единицы энергии электрон-вольт и киловатт-час). Системные единицы подразделяются на основные, выбираемые произвольно (по соглашению), и производные, которые выражаются через основные.

Физические величины характеризуются определенной размерностью. Анализ размерностей в ряде случаев оказывается плодотворным теоретическим методом исследования физических явлений.

### 1.1. Основные понятия. Физические величины. Законы физики

1°. Характеристикам объектов и явлений природы дают названия, чтобы проводить различия между ними. При этом возникают *понятия*, определения которых отвечают на вопросы, что понимают под тем-то и тем-то. Иногда понятию можно сопоставить *физическую величину*. При этом соответствующая характеристика объекта, явления или процесса должна допускать *количественное выражение*, т. е. для нее можно *определить* (ввести по определению) *процедуру измерения* и устано-

вить *единицы*, в которых она измеряется. Например, понятию пространственной протяженности сопоставляется физическая величина, называемая расстоянием. Для измерения расстояний принята по определению некоторая процедура и выбрана определенная единица (метр).

*Измерить* физическую величину — это значит выяснить, сколько раз в ней содержится однородная с ней величина, принятая за единицу. Это есть *числовое значение* физической величины.

2°. Между разными физическими величинами удастся установить объективно существующие соотношения, т. е. установить *физические законы*. Иногда эти законы можно представить в форме математических уравнений. Физику называют *точной наукой*, выражая этим то обстоятельство, что устанавливаемые в физике соотношения между физическими величинами имеют *количественную форму*. Но следует помнить, что эти соотношения (физические законы), как правило, приближенны и справедливы в ограниченных областях.

В противоположность «чистой» математике, где величины по определению обладают теми свойствами, которые им произвольно приписаны, в физике необходимо не приписывать, а открывать отдельные объективно существующие свойства.

Входящие в уравнения физических законов *значения физических величин* (как и обозначения их символов — буквы) всегда следует рассматривать как *произведения числового значения и единицы измерения*. Если в уравнении для физических величин участвуют математические функции типа  $\ln$ ,  $\sin$ ,  $\exp$ , то их аргументом может быть только безразмерное число (в частности, отношение величин одинаковой размерности, см. § 1.3).

3°. При любом исследовании физических явлений необходим обоснованный выбор *физической модели*, т. е. определенная идеализация, при которой следует сохранить наиболее важные черты явления. Примерами физических моделей могут служить материальная точка, абсолютно твердое тело, иде-

альный газ и т. п. Применимость той или иной модели зависит не столько от свойства рассматриваемой реальной системы, сколько от характера вопросов, на которые нужно получить ответы. Очень важно при этом уметь определять необходимую меру математической строгости: бессмысленно стремиться к получению точного решения в рамках достаточно грубой физической модели.

## 1.2. Система единиц

1°. Любое измерение заключается в сравнении измеряемой величины с другой, однородной с ней величиной, принятой за единицу. В принципе, единицы для всех величин можно выбрать совершенно независимо друг от друга. Однако это практически неудобно, так как тогда во всех уравнениях, выражающих связь между различными физическими величинами, появятся числовые коэффициенты. Кроме того, пришлось бы для каждой физической величины вводить свой эталон.

Основной особенностью современных систем единиц является то, что между единицами различных величин имеются определенные соотношения. Эти соотношения устанавливаются теми физическими законами или определениями, которыми связаны между собой измеряемые величины. Например, единицу скорости выбирают так, что она выражается через единицы длины и времени. При таком выборе единицы скорости используют определение скорости. Единицу силы устанавливают с использованием второго закона Ньютона и выражают через единицы ускорения и массы. Это означает, что для нескольких произвольно выбираемых физических величин единицы устанавливают независимо друг от друга и называют *основными*. Единицы для остальных величин выражают через основные и называют *производными*.

Число основных единиц и сам их выбор в разных системах единиц могут быть различными. Например, в системе единиц Гаусса (СГС) в качестве основных выбраны три единицы: длины ( $L$ ), времени ( $T$ ) и массы ( $M$ ), а в Международной системе

единиц СИ в качестве основных выбраны семь единиц: длины ( $L$ ), времени ( $T$ ), массы ( $M$ ), термодинамической температуры ( $\theta$ ), количества вещества ( $N$ ), силы электрического тока ( $I$ ) и силы света ( $J$ ). Определения основных и произвольных единиц в СИ приведены в приложении II.

2°. Кроме произвола в выборе физических величин, единицы которых принимаются за основные, и произвола в выборе *масштаба (размера)* этих единиц, имеется еще произвол в выборе *коэффициентов пропорциональности* в формулах, которыми вводятся производные единицы. Проиллюстрируем это на примере единицы площади. Выбрав в качестве единицы длины метр, можно в качестве единицы площади выбрать либо квадратный метр — площадь квадрата, сторона которого равна 1 метру, либо «круглый» метр — площадь круга, диаметр которого равен 1 метру. В первом случае площадь квадрата со стороной  $l$  выражается формулой  $S = l^2$ , а площадь круга с диаметром  $l$  — формулой  $S = \pi l^2/4$ . Во втором случае более простая формула получается для площади круга:  $S = l^2$ , в то время как формула для площади квадрата будет содержать  $\pi$ :  $S = 4l^2/\pi$ .

Рассмотренные возможности введения единиц площади, отличающихся числовым коэффициентом, основывались на одной и той же геометрической закономерности, связывающей площади подобных фигур с их линейными размерами:  $S \sim l^2$ . Но при введении производной единицы какой-либо величины, кроме упомянутого произвола в выборе числового коэффициента, имеется еще произвол в выборе физического закона, с помощью которого устанавливается связь производных единиц с основными. Например, единица силы обычно устанавливается с помощью второго закона Ньютона  $F = ma$ . В этом случае выражение единицы силы через основные единицы, т. е. *размерность* силы, имеет вид

$$\dim F = MLT^{-2}. \quad (1.1)$$

Однако при тех же основных единицах ( $L$ ,  $M$ ,  $T$ ) для установления единицы силы можно вместо второго закона Ньютона

использовать закон всемирного тяготения, полагая в нем коэффициент пропорциональности безразмерным и равным, например, единице:  $F = m_1 m_2 / r^2$ . В этом случае за единицу силы принимается сила, с которой притягиваются друг к другу единичные точечные массы, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга. Размерность силы при этом имеет вид

$$\dim F = M^2 L^{-2}. \quad (1.2)$$

При таком выборе единицы силы во втором законе Ньютона, разумеется, появится размерный коэффициент, подобно тому как при обычном выборе (на основе второго закона Ньютона) размерный коэффициент появляется в законе всемирного тяготения (*гравитационная постоянная*).

Разобранный пример показывает, что *размерность физической величины зависит от способа построения системы единиц*.

Таким образом, при выборе способа построения системы единиц существует большой произвол. Однако на практике приходится считаться с целым рядом требований, которые существенно ограничивают этот произвол. Слишком большое число основных единиц было бы неудобно из-за появления размерных коэффициентов во многих физических формулах и из-за необходимости установления большого числа эталонов. Слишком малое число основных единиц приводит к тому, что построенные на их основе производные единицы оказываются неудобными для использования. Практически используются системы, в которых число основных единиц колеблется от трех до семи.

**3°.** При установлении основных единиц весьма важной является возможность создания таких эталонов, которые обеспечивали бы постоянство единицы и возможность ее воспроизведения, а также восстановление эталона в случае его утраты. Самый надежный способ решения этой задачи — поручить «хранение» эталонов самой природе. Так, принятый в настоящее время эталон времени основывается на периоде колебаний,

происходящих в атоме изотопа цезия-133. По определению единица времени *секунда* содержит 9 192 631 770 периодов этих колебаний. Атомы одного и того же изотопа тождественны, поэтому при указанном выборе эталона времени природа предоставляет в наше распоряжение практически неограниченное число совершенно идентичных «часов». Для установления основной единицы длины в настоящее время используется тот же самый эталон: по определению *метр* — это длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды. Для эталона массы пока не удастся использовать массу какой-либо атомной частицы, так как точность определения атомных масс уступает точности измерения масс при взвешивании. Эталоном массы *килограмм* служит платино-иридиевая гиря, хранящаяся в Международном бюро мер и весов.

4°. Сложившаяся в настоящее время ситуация, когда как в учебной, так и в научной литературе наряду с *Международной системой единиц* СИ (от международного символа SI) широко используется *гауссова система* (или *симметричная система* СГС — от первых букв наименований основных единиц Сантиметр, Грамм, Секунда), требует понимания принципов построения каждой из них. Единицы механических величин в этих двух системах отличаются только масштабом, так как основные единицы в них выбраны на основе одних и тех же физических величин — длины, времени и массы. Поэтому все формулы и уравнения, выражающие физические законы и определения, в механике одинаковы в обеих системах.

Иначе обстоит дело в электродинамике. Единица электрического заряда является производной и выражается через основные в гауссовой системе с помощью закона Кулона, коэффициент пропорциональности в котором выбирается безразмерным и равным единице:  $F = q_1 q_2 / r^2$ . Размерность заряда получается равной

$$\dim q = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}. \quad (1.3)$$

Единица электрического заряда в гауссовой системе не имеет специального названия. Все остальные электрические величин-

ны в этой системе имеют единицы, выражающиеся через единицу заряда, а тем самым и через основные единицы. Например, размерность силы электрического тока

$$\dim I = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}. \quad (1.4)$$

Аналогичным образом вводятся производные единицы напряженности электрического поля, потенциала, емкости и т. д.

5°. Единицы магнитных величин вводятся в гауссовой системе следующим образом. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое прямолинейным бесконечным проводником, по которому течет ток  $I$ . Согласно закону Био — Савара — Лапласа элемент этого проводника  $\Delta l$  создает в точке наблюдения, находящейся на расстоянии  $r$  от элемента, индукцию магнитного поля  $\Delta B$ , равную

$$\Delta B = k \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2},$$

где коэффициент  $k$  зависит от выбора единиц. Суммирование полей, создаваемых всеми элементами проводника, дает для результирующей индукции поля в точке наблюдения выражение

$$B = k \frac{2I}{r}. \quad (1.5)$$

Обнаружить магнитное поле можно по его действию на другой проводник с током. Если этот проводник расположить параллельно проводнику, создающему магнитное поле, то действующая на него сила, согласно закону Ампера, будет пропорциональна индукции магнитного поля  $B$ , току в нем  $I'$  и его длине  $l$ :

$$F = k' I' B l. \quad (1.6)$$

Коэффициент  $k$  в (1.5) может быть выбран произвольно, так как единица индукции магнитного поля  $B$  еще не установлена. Но после того как этот коэффициент  $k$  в (1.5) выбран (тем самым выбрана и единица индукции  $B$ ), коэффициент  $k'$  в (1.6) уже не может выбираться произвольно, а должен определяться из эксперимента. Разумеется, можно поступить и на-

оборот: использовать уравнение (1.6) для введения единицы индукции магнитного поля, полагая  $k' = 1$ , тогда коэффициент  $k$  в (1.5) будет определяться на опыте. В системе Гаусса (в симметричной системе СГС) поступают следующим образом: выбирают коэффициент  $k$  в (1.5) так, чтобы он равнялся коэффициенту  $k'$  в (1.6).

Если подставить в (1.6) индукцию магнитного поля  $B$  из (1.5), то для силы взаимодействия двух параллельных проводников с токами  $I$  и  $I'$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, получим следующее выражение:

$$F = kk' \frac{2II'l}{r}. \quad (1.7)$$

В гауссовой системе  $kk' = k^2$ . Поскольку для всех величин, входящих в эту формулу, единицы уже выбраны, коэффициент  $k^2$ , как легко убедиться, имеет размерность  $L^{-2}T^2$ , обратную размерности квадрата скорости. Этот коэффициент должен определяться экспериментально по измерению силы взаимодействия двух параллельных проводников, находящихся на известном расстоянии, когда по ним протекают известные токи. Опыт показал, что числовое значение  $k^2$  равно  $1/c^2$ , где  $c$  — скорость света в вакууме:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}.$$

В гауссовой системе единиц закон Био — Савара — Лапласа и закон Ампера записываются в виде

$$\Delta B = \frac{1}{c} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}, \quad F = \frac{1}{c} I' B l. \quad (1.8)$$

На основании последней формулы из (1.8) устанавливается единица индукции магнитного поля *гаусс*. Гаусс — это индукция такого поля, которое действует на 1 сантиметр проводника с током в 1 единицу тока с силой, равной  $1/c$  дины, если проводник расположен перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.



6°. В отличие от гауссовой системы единиц, где единица силы тока является производной и выражается через основные единицы с помощью закона Кулона, в системе единиц СИ единица силы тока является основной. Эта единица выбрана на основе закона взаимодействия параллельных токов, выражаемого (1.7). За единицу силы тока *ампер* принимают такой ток, при протекании которого по параллельным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 метр друг от друга, сила взаимодействия, приходящаяся на 1 метр длины проводника, равна  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона. Наряду с метром, секундой и килограммом ампер является четвертой основной единицей СИ (см. приложение II).

После того как единица силы тока выбрана, можно установить размерность коэффициента  $kk'$  в (1.7). Она оказывается равной  $H/A^2$ , т. е.  $MLT^{-2}I^{-2}$ . Коэффициент  $kk'$  в СИ обозначается  $\mu_0/4\pi$ , а величина  $\mu_0$  называется *магнитной постоянной*.

С помощью (1.7) и определения ампера можно вычислить ее значение. Подставляя в (1.7)  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  Н,  $I = I' = 1$  А,  $l = r = 1$  м,  $kk' = \mu_0/4\pi$ , находим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 12,5666370614 \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2. \quad (1.9)$$

Числовой множитель  $4\pi$  вводится в (1.9) для так называемой рационализации системы единиц. Благодаря этому коэффициент  $4\pi$  исчезает из многих часто употребляемых формул (хотя при этом он появляется в некоторых других формулах). Введение здесь множителя  $4\pi$  совершенно аналогично рассмотренному выше примеру перехода от квадратных метров к «круглым» при измерении площади.

Подчеркнем, что числовое значение магнитной постоянной  $\mu_0$  (1.9) в СИ получается как прямое следствие определения ампера, а не устанавливается на опыте, в отличие от коэффициента  $1/c^2$  в гауссовой системе. Так получается потому, что в СИ единица силы тока является основной (выбранной произвольно), в то время как в гауссовой системе эта единица является производной.

Введение единицы силы тока «ампер» однозначно определяет только произведение коэффициентов  $k$  и  $k'$ , входящих в (1.5) и (1.6):  $kk' = \mu_0/4\pi$ . При этом еще остается произвол в выборе сомножителей. В СИ полагают  $k' = 1$ ; тем самым для  $k$  получается значение, равное  $\mu_0/4\pi$ . В результате закон Ампера, описывающий действие магнитного поля на проводник с током  $I'$ , в СИ записывается в виде

$$F = I'Bl. \quad (1.10)$$

Этот закон используется для установления единицы индукции магнитного поля  $B$ . Эта единица имеет наименование *тесла*. Тесла — это индукция такого поля, которое на 1 метр проводника с током 1 ампер действует с силой 1 ньютон, если проводник расположен перпендикулярно линиям индукции магнитного поля. Из (1.10) видно, что  $B$  имеет размерность  $\text{Н}/(\text{А} \cdot \text{с})$ , т. е.  $\text{MT}^{-2}\text{I}^{-1}$ .

Закон Био — Савара — Лапласа, на основе которого рассчитывается индукция магнитного поля, создаваемого проводником с током, в СИ содержит размерный коэффициент  $k = \mu_0/4\pi$ :

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}.$$

Закон Кулона, описывающий взаимодействие точечных зарядов, в СИ содержит размерный коэффициент, ибо единица заряда в СИ *кулон* устанавливается независимо от закона Кулона на основе единицы силы тока ампер:  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$ . Размерный коэффициент в законе Кулона записывается в виде  $1/(4\pi\epsilon_0)$ , где величина  $\epsilon_0$  называется *электрической постоянной*, а числовой множитель  $4\pi$  вводится для рационализации:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что  $\epsilon_0$  имеет размерность  $\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ , т. е.  $\text{M}^{-1}\text{L}^{-3}\text{T}^4\text{I}^2$ . Ее единица имеет наименование *фарад на метр*. Числовое значение электрической постоянной  $\epsilon_0$  определяется на опыте. Его можно найти, измеряя, напри-

мер, силу взаимодействия известных точечных зарядов, находящихся на известном расстоянии друг от друга. Измерения дают для  $\varepsilon_0$  следующее значение:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) = \\ &= 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.} \quad (1.12)\end{aligned}$$

7°. Установить соотношение между единицами заряда (или тока) в гауссовой системе и в СИ можно следующим образом. Пусть по параллельным проводникам, находящимся на расстоянии 1 метр друг от друга, текут токи по 1 амперу. Тогда действующая на 1 метр длины проводника сила равна  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона, т. е.  $2 \cdot 10^{-2}$  дины. Формула (1.7) для вычисления этой силы в гауссовой системе единиц имеет вид

$$F = \frac{1}{c} \frac{2I^2 l}{r}.$$

Подставив в левую часть этой формулы  $F = 2 \cdot 10^{-2}$  дин, а в правую  $l = r = 100$  см,  $c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$  см/с, найдем, что такую силу магнитного взаимодействия проводников обеспечивает ток, численно равный 0,1с единиц тока в гауссовой системе. Итак,

$$1 \text{ А}/(1 \text{ ед. тока гаусс. сист.}) = 2,99792458 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^9.$$

Соотношение между единицами тока в гауссовой системе и в СИ выражается через определяемую на опыте постоянную  $c$ .

Таким же является и соотношение между единицами заряда в этих системах:

$$1 \text{ Кл} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ ед. заряда гаусс. сист.}$$

Зная это соотношение, можно вычислить значение электрической постоянной  $\varepsilon_0$ . Два точечных заряда по 1 кулону, находящиеся на расстоянии 1 метр друг от друга, взаимодействуют с силой, равной  $1/(4\pi\varepsilon_0)$  ньютона. В гауссовой системе единиц эта сила равна

$$F = \frac{q^2}{r^2} = \frac{(3 \cdot 10^9)^2}{(100)^2} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н.}$$

Итак, числовое значение коэффициента  $1/(4\pi\epsilon_0)$  равно  $9 \cdot 10^9$ . Поэтому

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2).$$

Нетрудно видеть, что фактически мы не теоретически «вычислили» электрическую постоянную  $\epsilon_0$ , а всего лишь выразили ее через другую экспериментально определяемую постоянную  $c$ . Это означает, что в конечном счете электрическая постоянная все-таки определяется экспериментально. Этим она принципиально отличается от магнитной постоянной  $\mu_0$ , значение которой задается (а не измеряется) в связи с определением ампера. Такое различие между  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  связано с тем, что в СИ введение единицы заряда основано на магнитном взаимодействии токов, а не на электростатическом взаимодействии зарядов.

Связь между экспериментально определяемыми постоянными  $\epsilon_0$  и  $c$  может быть представлена в несколько иной форме. Для этого сравним выражения для сил электростатического взаимодействия зарядов и магнитного взаимодействия токов, записанные в гауссовой системе и в СИ:

$$F_s = \frac{q^2}{r^2}, \quad F_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}, \quad (1.13)$$

$$F_m = \frac{1}{c^2} \frac{2I^2 l}{r}, \quad F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I^2 l}{r}. \quad (1.14)$$

Безразмерное отношение  $F_s/F_m$  должно быть одинаковым в обеих системах единиц. Составляя отношение правых частей (1.13) и (1.14) и приравнивая значения этого отношения в обеих системах, можно убедиться, что

$$1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0. \quad (1.15)$$

Как уже отмечалось, запись некоторых формул в гауссовой системе и в СИ отличается не только размерными коэффициентами, но и числовыми множителями, появление которых связано с рационализацией системы единиц СИ. В приложении VI

сопоставляется запись наиболее важных формул электромагнетизма в этих системах единиц.

### 1.3. Метод анализа размерностей

1°. Физические величины, числовое значение которых не зависит от выбранного масштаба (размера) единиц, называются *безразмерными*. Примеры безразмерных величин — угол (отношение длины дуги к радиусу), показатель преломления света (отношение скорости света в вакууме к скорости света в веществе). Физические величины, числовое значение которых меняется при изменении масштаба единиц, называются *размерными*. Примеры размерных величин — длина, скорость, энергия. Выражение производной единицы физической величины через основные называется ее *размерностью* (или формулой размерности). Например, размерность импульса

$$\dim p = LMT^{-1}.$$

Размерности физических величин в СИ приведены в приложении II.

Соображения размерности можно использовать для проверки правильности полученных результатов при решении физических задач: правые и левые части полученных выражений, как и отдельные слагаемые в каждой из частей, должны иметь одинаковую размерность. Метод размерностей может использоваться и для вывода формул и уравнений, когда нам известно, от каких физических параметров может зависеть искомая величина. Сущность метода легче уяснить на конкретных примерах.

2°. Определим скорость  $v$ , с которой упадет на землю свободно падающее с высоты  $h$  тело массы  $m$ . Так как искомая величина может зависеть от ускорения свободного падения  $g$ , высоты  $h$  и массы  $m$ , то выражение для  $v$  можно искать в виде

$$v = Ch^x g^y m^z, \quad (1.16)$$

где  $C$  — некоторая безразмерная постоянная, а  $x$ ,  $y$  и  $z$  — числа, подлежащие определению. Приравниваем размерности левой и правой частей (1.6):

$$LT^{-1} = L^x (LT^{-2})^y M^z.$$

Показатели степеней у  $L$ ,  $M$  и  $T$  в левой и правой частях должны быть равны, поэтому

$$\begin{array}{ll} L & 1 = x + y, \\ T & -1 = -2y, \\ M & 0 = z. \end{array}$$

Отсюда  $z = 0$ ,  $y = 1/2$ ,  $x = 1/2$ , и формула (1.16) принимает вид

$$v = C\sqrt{gh}. \quad (1.17)$$

Истинное значение скорости  $v = \sqrt{2gh}$ , т. е. анализ размерностей дал возможность определить характер зависимости  $v$  от  $g$ ,  $h$  и  $m$  с точностью до числового множителя  $C$ .

3°. Определим дальность  $s$  полета пули, выпущенной с начальной скоростью  $v$  в горизонтальном направлении на высоте  $h$  над земной поверхностью. Ищем  $s$  в виде

$$s = Cv^x g^y h^z m^u. \quad (1.18)$$

Равенство размерностей:

$$L = (LT^{-1})^x (LT^{-2})^y L^z M^u. \quad (1.19)$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{array}{ll} L & 1 = x + y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{array}$$

Отсюда  $x = -2y$ ,  $z = 1 + y$ , и выражение (1.18) для  $s$  принимает вид

$$s = Cv^{-2y} g^y h^{1+y} = Ch (gh/v^2)^y. \quad (1.20)$$

Анализ размерностей позволил установить, что дальность полета  $s$  не зависит от массы пули, но зависит от высоты  $h$  и некоторой неизвестной степени  $y$  безразмерной комбинации пара-

метров  $gh/v^2$ . Если нам известна (например, из опыта) зависимость  $s$  хотя бы от одного из параметров, то  $y$  немедленно определяется. Пусть известно, что  $s \sim v$ ; тогда  $y = -1/2$ , и для  $s$  из (1.20) получаем

$$s = Cv\sqrt{h/g},$$

что с точностью до постоянного множителя  $C$  совпадает с истинным значением  $s = v\sqrt{2h/g}$ . Анализ размерностей не позволил полностью определить характер зависимости потому, что число параметров, от которых могла зависеть дальность  $s$  (четыре), оказалось больше числа основных единиц используемой системы единиц.

В этом примере характер зависимости можно определить полностью, если воспользоваться так называемыми векторными единицами длины. Будем измерять длину в горизонтальном и вертикальном направлениях в разных единицах и обозначим их размерности через  $L_r$  и  $L_b$ . Тогда, учитывая, что

$$\dim v = L_r T^{-1}, \quad \dim g = L_b T^{-2}, \quad \dim h = L_b,$$

вместо (1.19) получаем

$$L_r = (L_r T^{-1})^x (L_b T^{-1})^y L_b^z M^u.$$

Приравниваем показатели степеней:

$$\begin{array}{ll} L_r & 1 = x, \\ L_b & 0 = y + z, \\ T & 0 = -x - 2y, \\ M & 0 = u. \end{array}$$

Отсюда  $y = -1/2$ ,  $z = 1/2$  и для  $s$  получаем

$$s = Cv g^{-1/2} h^{1/2} = Cv\sqrt{h/g}.$$

Увеличение числа основных единиц расширяет возможности метода размерностей.

4°. Рассмотрим ламинарное течение вязкой жидкости по трубе (рис. 1.1). Объем жидкости  $V$ , протекающей через сечение трубы за время  $t$ , пропорционален времени  $t$  и зависит

от разности давлений  $\Delta p$  на концах трубы, вязкости жидкости  $\eta$ , длины  $l$  и радиуса  $R$  трубы:

$$V = C (\Delta p)^x \eta^y l^z R^u t.$$

Здесь также удобно измерять длину вдоль и поперек трубы в разных единицах с размерностями  $L_{\parallel}$  и  $L_{\perp}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \dim l &= L_{\parallel}, & \dim R &= L_{\perp}, & \dim V &= L_{\parallel} L_{\perp}^2, \\ \dim \Delta p &= M L_{\parallel} L_{\perp}^{-2} T^{-2}, & \dim \eta &= M L_{\parallel}^{-1} T^{-1}, \end{aligned}$$

и равенство размерностей принимает вид

$$L_{\parallel} L_{\perp} = (M L_{\parallel} L_{\perp}^{-2} T^{-2})^x (M L_{\parallel}^{-1} T^{-1})^y L_{\parallel}^z L_{\perp}^u T.$$

Приравнивая показатели степеней,

$$\begin{aligned} M & 0 = x + y, \\ L_{\parallel} & 1 = x - y + z, \\ L_{\perp} & 2 = -2x + u, \\ T & 0 = -2x - y + 1, \end{aligned}$$

находим  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1$ ,  $u = 4$  и для  $V$  получаем

$$V = C \frac{\Delta p R^4}{\eta l} t.$$

Таким образом, объем жидкости  $V$ , протекающей через сечение трубы за время  $t$ , пропорционален разности давлений на единицу длины трубы  $\Delta p/l$  и обратно пропорционален вязкости, что достаточно очевидно и без приведенного расчета. Однако не столь тривиален вывод о том, что объем жидкости пропорционален четвертой степени радиуса трубы (т. е. *квадрату* площади ее поперечного сечения). Полученные закономерности справедливы для трубы с постоянным поперечным сечением произвольной формы. В случае круглого сечения динамический расчет дает  $C = \pi/8$  (см. формулу Пуазейля (2.95)).

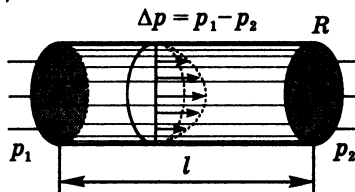


Рис. 1.1.

К расчету объема  $V$  вязкой жидкости, протекающей через сечение трубы за время  $t$



5°. Определим зависимость скорости звука (т. е. продольных упругих волн, см. п. 5.7.4°) от свойств среды. Можно предположить, что эта скорость зависит от упругих свойств среды, определяемых модулем Юнга  $E$  (п. 3.6.2°), от инертных свойств, описываемых плотностью  $\rho$ , и от длины волны  $\lambda$ . Размерности этих величин:

$$\dim E = L^{-1}MT^{-2}, \quad \dim \rho = ML^{-3}, \quad \dim \lambda = L.$$

Записывая выражение для искомой скорости звука  $u$  в виде  $u = CE^x \rho^y \lambda^z$ , приходим к следующему равенству размерностей:

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-2})^x (ML^{-3})^y L^z,$$

откуда

$$\begin{array}{ll} L & 1 = -x - 3y + z, \\ M & 0 = x + y, \\ T & -1 = -2x, \end{array}$$

т. е.  $x = 1/2$ ,  $y = -1/2$ ,  $z = 0$ . Итак, получаем

$$u = C\sqrt{E/\rho}. \quad (1.21)$$

Скорость звука не зависит от длины волны  $\lambda$ . Динамический вывод дает тот же результат с  $C = 1$ .

6°. Определим скорость волн на поверхности воды (п. 5.7.13°). Скорость капиллярных волн зависит от поверхностного натяжения  $\sigma$  (п. 3.5.1°), плотности воды  $\rho$  и длины волны  $\lambda$ . Записывая выражение для  $u_k$  в виде  $u_k = C\sigma^x \rho^y \lambda^z$  и учитывая, что  $\dim \sigma = MT^{-2}$ , получаем

$$LT^{-1} = (MT^{-2})^x (ML^{-3})^y L^z,$$

откуда  $x = 1/2$ ,  $y = z = -1/2$ . Поэтому

$$u_k = C\sqrt{\sigma/\rho\lambda}.$$

Динамическая теория дает  $C = \sqrt{2\pi}$ .

Скорость тяжелых волн на глубокой воде ( $h \gg \lambda$ ) может зависеть только от  $g$  и  $\lambda$ . Составляя равенство размерностей для формулы  $u_\tau = Cg^x\lambda^y$ , находим  $x = y = 1/2$ , т. е.

$$u_\tau = C\sqrt{g\lambda}. \quad (1.22)$$

Динамическое рассмотрение дает  $C = 1/\sqrt{2\pi}$ .

Скорость предельно длинных волн ( $\lambda \gg h$ ) и волн на мелкой воде не должна зависеть от длины волны  $\lambda$ , но теперь она может зависеть от глубины водоема  $h$ . Равенство размерностей для формулы  $u_\tau = Cg^xh^y$  дает

$$u_\tau = C\sqrt{gh}. \quad (1.23)$$

В данном случае  $C = 1$ .

**7°. Микроскопическая модель реального газа.** Для реального газа (п. 3.4.1°) требуется принимать во внимание конечный размер молекул. Простейшая модель такой системы — твердые шары радиуса  $r_0$ , взаимодействующие только при соприкосновении друг с другом. Кроме радиуса  $r_0$ , система характеризуется массой  $m$  молекул (шаров), их концентрацией  $n$  и средней тепловой энергией  $kT$ . Близость свойств такой системы к свойствам идеального газа зависит от отношения энергии взаимодействия молекул к энергии теплового движения  $kT$ , т. е. определяется безразмерным параметром, составленным из  $r_0$ ,  $m$ ,  $n$  и  $kT$ . Поскольку время входит только в  $kT$ , то  $kT$  в безразмерный параметр  $\gamma$  входить не может. Но тогда не может входить в него и масса  $m$ . А из оставшихся величин  $r_0$  и  $n$  можно составить только один независимый параметр  $\gamma = r_0^3 n$ , физический смысл которого — отношение собственного объема шара к среднему объему, приходящемуся на одну молекулу в газе. Предельному случаю идеального газа соответствует сильное разрежение, т. е.  $\gamma \ll 1$ . Интересно, что отношение энергии взаимодействия молекул к энергии теплового движения  $kT$  в такой модели оказалось не зависящим от  $kT$ . Это значит, что энергия взаимодействия молекул в модели твердых шаров, так же как и кинетическая энергия, пропорциональна температуре!

Однако из опыта известно, что у реальных газов степень идеальности зависит от температуры, вопреки предсказанию модели твердых шаров. Это значит, что в микроскопической модели реального газа необходимо учитывать взаимодействие молекул друг с другом и на расстоянии, а не только при соприкосновении.

8°. *Время релаксации в газе* (время установления равновесного состояния, см. п. 3.1.1°). Анализ размерностей показывает, что из четырех характеризующих газ параметров  $r_0$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $kT$  (п. 1.3.7°) в величину  $\tau$ , имеющую размерность времени, масса молекулы  $m$  и энергия теплового движения  $kT$  входят в определенных степенях в комбинации  $\sqrt{kT/m}$ , в то время как зависимость  $\tau$  от  $r_0$  и  $n$  определяется с точностью до произвольной функции  $f$  безразмерного параметра  $\gamma = r_0^3 n$ :

$$\tau = \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{kT/m}} f(r_0^3 n). \quad (1.24)$$

Поскольку  $\sqrt{kT/m}$  имеет смысл скорости теплового движения молекул, то полученный результат означает, что релаксация в газе из нейтральных молекул может происходить только благодаря их тепловому движению и характерное время  $\tau$  всегда обратно пропорционально корню из температуры.

9°. *Время релаксации в плазме*. В плазме вместо параметра  $r_0$ , характеризующего размер нейтральных частиц, фигурирует квадрат заряда  $e^2$ , поскольку кулоновское взаимодействие заряженных частиц простирается на бесконечно большое расстояние. Анализ размерностей (который в данном случае удобно производить в гауссовой системе единиц) показывает, что из  $e^2$ ,  $n$ ,  $m$  и  $kT$  можно составить только один независимый безразмерный параметр  $\gamma = e^2 n^{1/3} / (kT)$ . Он имеет смысл отношения потенциальной энергии взаимодействия частиц, находящихся на среднем расстоянии  $n^{-1/3}$  друг от друга, к энергии теплового движения  $kT$ . Поэтому классическая (не квантовая) плазма тем ближе по свойствам к идеальному газу, чем меньше концентрация  $n$  заряженных частиц и чем выше температура  $T$ . По аналогии с (1.24) легко написать параметр  $\tau$ ,

имеющий размерность времени:

$$\tau = \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{kT/m}} f\left(\frac{e^2 n^{1/3}}{kT}\right). \quad (1.25)$$

Как и в нейтральном газе, здесь существуют релаксационные процессы, определяемые тепловым движением частиц плазмы,

когда  $f \sim 1$  и  $\tau \sim \frac{n^{-1/3}}{\sqrt{kT/m}}$ . Однако возможны и процессы,

характерное время которых не зависит от температуры: при  $f(x) = C/\sqrt{x}$  из (1.25) имеем

$$\tau = C\sqrt{m/(ne^2)}. \quad (1.26)$$

Независимость  $\tau$  от температуры означает, что это время не зависит от скорости частиц. Механическое движение частицы, характерное время которого не зависит от скорости, — это гармоническое колебание (§ 5.2). Колебания в плазме, период которых определяется формулой (1.26), возникают при локальном нарушении ее электронейтральности (когда в некотором месте концентрации частиц с зарядами противоположных знаков неодинаковы). Частота  $\omega$  таких *плазменных колебаний* зависит от концентрации  $n$  электронов и, как показывает динамическое рассмотрение, равна  $\sqrt{4\pi ne^2/m}$  в гауссовой системе единиц ( $\omega = \sqrt{(ne^2/m\epsilon_0)}$  в СИ).

#### 10°. Температурная зависимость излучения черного тела.

Равновесное тепловое излучение можно рассматривать как газ фотонов. Объемная плотность энергии излучения  $w$  равна произведению концентрации  $n$  фотонов на среднюю энергию одного фотона  $\langle E \rangle$ , которая в тепловом равновесии по порядку величины равна  $kT$ . Так как  $\dim n = L^{-3}$ , то нужно составить комбинацию с размерностью длины из величин  $kT$ ,  $c$  и  $\hbar$ . Единственная такая комбинация — это  $c\hbar/(kT)$ . Поэтому концентрация  $n$  фотонов пропорциональна  $(kT/c\hbar)^3$ , и для объемной плотности энергии получаем

$$w = C(kT)^4/(\hbar c)^3,$$

где  $C$  — безразмерный коэффициент. Полная испускаемая черным телом энергия пропорциональна четвертой степени температуры.

## 2. МЕХАНИКА

Механика изучает простейшую форму движения материи — *механическое движение*. Механическое движение состоит в изменении положения тела относительно других тел. Описание механического движения производится в определенной системе отсчета. *Системой отсчета* называют тело (или совокупность неподвижных друг относительно друга тел) вместе с приборами для измерения расстояний и промежутков времени. Механическое движение *относительно* — одно и то же движение будет различным в разных системах отсчета.

На основе изучения механического движения формируются представления о *физическом пространстве и времени*. Эти понятия являются фундаментальными, т. е. их нельзя определить через какие-то более простые понятия. Опытным путем установлены следующие их свойства: *физическое пространство трехмерно, однородно и изотропно, время одномерно и однородно*. Однородность времени проявляется в неизменности физических законов с течением времени: опыт, поставленный в одинаковых условиях в разные моменты времени, дает одинаковые результаты. С однородностью времени связано сохранение энергии (п. 2.4.7°). Однородность и изотропность пространства проявляются в независимости физических явлений в замкнутой (изолированной) физической системе от ее положения и ориентации как целого. С однородностью пространства связано сохранение импульса, с изотропностью — сохранение момента импульса (п. 2.4.3°).

### 2.1. Кинематика

Задача *кинематики* — математическое описание движения без выяснения его физических причин. Используемые в кинематике физические модели — материальная точка, твердое тело, сплошная среда.

### Кинематика материальной точки

1°. *Материальная точка* — тело, размеры и форма которого несущественны в рассматриваемом движении. В частности, при поступательном движении (п. 2.1.6°) любое твердое тело можно считать материальной точкой.

В выбранной системе отсчета пространственное положение материальной точки определяется ее *радиус-вектором*  $\mathbf{r}$ , проведенным из начала системы координат (п. М8.1.1°). Задание радиус-вектора  $\mathbf{r}$  эквивалентно указанию трех чисел, например трех его *проекций*  $x$ ,  $y$ ,  $z$  на оси декартовой системы координат (рис. 2.1), см. п. М8.1.2°.

Число независимых координат, которое необходимо для задания пространственного положения механической системы, называется *числом ее степеней свободы*. Материальная точка имеет три степени свободы.

При движении радиус-вектор и координаты изменяются с течением времени. Говорят, что задан *закон движения*, если указана векторная функция времени  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  или три эквивалентные ей скалярные функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ .

Линия, описываемая движущейся материальной точкой в пространстве, называется *траекторией*. Движения разделяются на *прямолинейные* и *криволинейные* в зависимости от вида траектории.

#### Пример

Заданы координаты точки как функции времени, соответствующие гармоническим колебаниям с одинаковой частотой  $\omega$  вдоль осей  $x$  и  $y$ :

$$x(t) = b \cos \omega t, \quad y(t) = d \sin \omega t, \quad z(t) = 0. \quad (2.1)$$

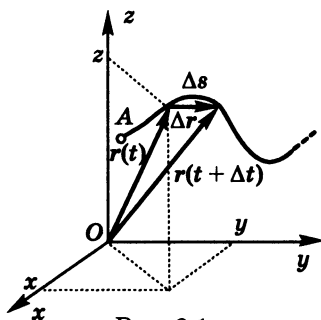


Рис. 2.1.  
Радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , траектория, перемещение  $\Delta \mathbf{r}$ , путь  $\Delta s$

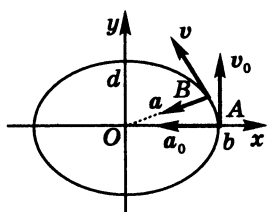


Рис. 2.2.

Для нахождения уравнения траектории надо исключить из (2.1) время  $t$ . Используя тождество  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$  (п. М9.3.2°), получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad (2.2)$$

Движение по эллипсу что соответствует движению в плоскости  $xy$  по эллипсу с полуосями  $b$  и  $d$  (рис. 2.2). Движение происходит против часовой стрелки, в чем можно убедиться с помощью (2.1): при  $t = 0$  точка находится в положении  $A$ , затем при  $t > 0$   $x$  начинает убывать, а  $y$  — возрастать; точка переходит в положение  $B$ .

**2°. Перемещение** точки за промежуток времени  $\Delta t$  — вектор  $\Delta \mathbf{r}$ , соединяющий положения точки в моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ . Из рис. 2.1 видно, что  $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$ .

**Путь**  $\Delta s$ , пройденный точкой за тот же промежуток времени  $\Delta t$ , — это длина соответствующего отрезка траектории. При прямолинейном движении в одном направлении  $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$ , при криволинейном  $\Delta s > |\Delta \mathbf{r}|$ . Путь  $s(t)$ , пройденный точкой к моменту времени  $t$ , — это длина траектории от некоторого начального положения  $A$  до положения в момент  $t$ . Если точка меняла направление движения по той же траектории, то ее путь  $s$  — это полное пройденное вдоль траектории расстояние.

**Средняя скорость**  $\mathbf{v}_{\text{cp}} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$ . Средняя скорость прохождения пути (или движения по траектории)  $v_s = \Delta s / \Delta t$ . При прямолинейном движении в одном направлении  $|\mathbf{v}_{\text{cp}}| = v_s$ , при криволинейном —  $|\mathbf{v}_{\text{cp}}| < v_s$ .

**Скорость** в момент времени  $t$  — предел, к которому стремится средняя скорость при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е. производная (п. М5.4.1°) от  $\mathbf{r}(t)$  по  $t$ :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.3)$$

Скорость в каждой точке направлена по касательной к траектории. Проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.4)$$

Ускорение в момент времени  $t$  — производная от  $v(t)$  по  $t$ :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \text{или} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (2.5)$$

### Пример

Для движения по эллипсу, описываемому уравнениями (2.1), имеем

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega b \sin \omega t, & a_x &= -\omega^2 b \cos \omega t, \\ v_y &= \omega d \cos \omega t, & a_y &= -\omega^2 d \sin \omega t, \\ v_z &= 0, & a_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

(п. М5.4.5°). В точке  $A$  (рис. 2.2)  $v_x = 0$ ,  $v_y = \omega d$ , т. е. скорость  $\mathbf{v}$  направлена вдоль оси  $y$ ;  $a_x = -\omega^2 b$ ,  $a_y = 0$ , т. е. ускорение  $\mathbf{a}$  направлено противоположно оси  $x$ .

3°. В случае произвольного *криволинейного движения* (рис. 2.3) ускорение можно разложить на две составляющие:  $\mathbf{a}_\tau$ , направленную по касательной к траектории, и  $\mathbf{a}_n$ , направленную по нормали к центру кривизны траектории (п. М9.3.5°):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \\ a_\tau &= \frac{dv}{dt}, \\ a_n &= \frac{v^2}{R}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

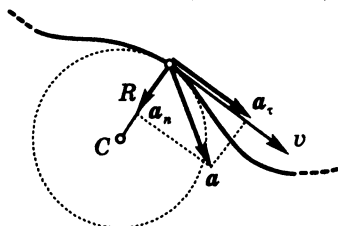


Рис. 2.3.

где  $R$  — радиус кривизны траектории в данной точке. Тангенциальное ускорение  $\mathbf{a}_\tau$  характеризует быстроту изменения модуля скорости, нормальное ускорение  $\mathbf{a}_n$  — ее направления.

Ускорение при криволинейном движении



4°. *Прямолинейное движение.* Если направить ось  $x$  вдоль траектории, то проекции перемещения, скорости и ускорения на оси  $y$  и  $z$  равны нулю и под  $x$ ,  $v$  и  $a$  следует понимать проекции соответствующих величин на ось  $x$ .

При *равномерном* движении скорость постоянна, поэтому

$$a = 0, \quad v = v_0, \quad x = x_0 + v_0 t. \quad (2.8)$$

На графике скорости (рис. 2.4, а) заштрихованная площадь численно равна пути, пройденному от момента  $t = 0$  до  $t$ . Тангенс угла наклона  $\alpha$  графика координаты (рис. 2.4, б) численно равен скорости  $v_0$ .

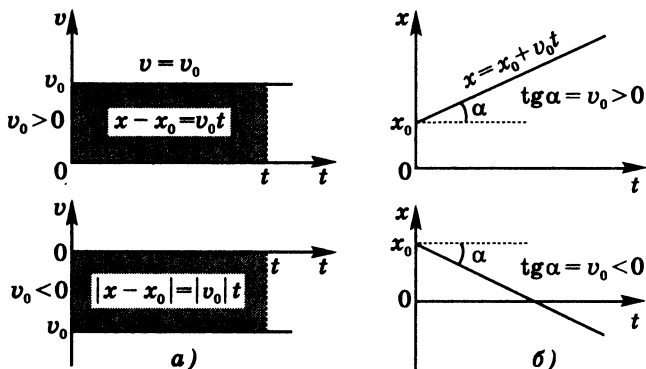


Рис. 2.4.

Графики скорости и координаты  
при равномерном движении

При движении с *постоянным ускорением*

$$a = a_0, \quad v = v_0 + a_0 t, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2}. \quad (2.9)$$

На графике ускорения (рис. 2.5, а) заштрихованная площадь численно равна модулю приращения скорости за время от  $t = 0$  до  $t$ . На графике скорости (рис. 2.5, б) заштрихованная площадь численно равна пути, пройденному от момента  $t = 0$  до  $t$ . График координаты — парабола (рис. 2.5, в).

В частном случае движения без начальной скорости ( $v_0 = 0$ ) из начала координат ( $x_0 = 0$ )

$$v = a_0 t, \quad x = \frac{a_0 t^2}{2}. \quad (2.10)$$

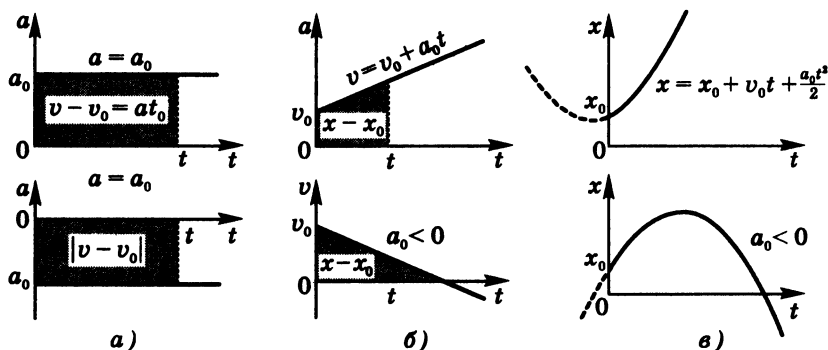


Рис. 2.5.

Графики ускорения, скорости и координаты при равнопеременном движении

Из этих формул следует

$$v^2 = 2a_0x. \quad (2.11)$$

В частном случае  $v_0 \neq 0$ ,  $x_0 = 0$  имеем

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_0t, & x &= v_0t + \frac{a_0t^2}{2}, \\ v^2 - v_0^2 &= 2a_0x. \end{aligned} \quad (2.12)$$

5°. При *равномерном движении* ( $v = \text{const}$ ) по окружности  $a_\tau = dv/dt = 0$ , ускорение направлено к центру (*центростремительное ускорение*) и равно

$$a_n = v^2/R. \quad (2.13)$$

Угловая скорость  $\omega$  связана со скоростью  $v$  и радиусом  $R$  окружности соотношением

$$v = \omega R. \quad (2.14)$$

Частота обращения по окружности  $\nu = \omega/2\pi$ , период обращения  $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ . Для  $a_n$  справедливы формулы

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2 \nu^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R. \quad (2.15)$$

### Кинематика твердого тела

6°. *Твердое тело* — система материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Твердое тело имеет шесть степеней свободы: для задания его положения нужно указать, например, три координаты какой-либо его точки и три угла, характеризующие его ориентацию в пространстве.

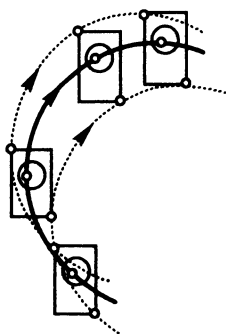


Рис. 2.6.  
Поступательное движение

Движение тела, при котором его ориентация остается неизменной, называется *поступательным*. При поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями (рис. 2.6), поэтому все тело можно рассматривать как одну материальную точку (параллельный перенос, см. п. М8.4.1°).

Другие важные виды движения твердого тела — вращение вокруг фиксированной оси, плоское движение, вращение вокруг неподвижной точки.

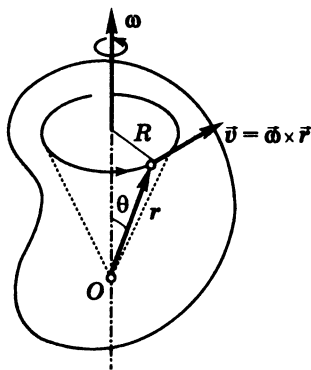


Рис. 2.7.  
Вращение вокруг оси

7°. При *вращении вокруг фиксированной оси* (рис. 2.7) все точки тела движутся по окружностям, причем скорость  $v$  любой из них равна векторному произведению (§ М8.2) угловой скорости  $\omega$ , направленной вдоль оси вращения, и радиуса-вектора  $r$  рассматриваемой точки тела:

$$v = \omega \times r. \quad (2.16)$$

Модуль скорости  $v = \omega R$ , где  $R = r \sin \theta$  — расстояние до оси вращения (рис. 2.7). Такому движению соответствует одна степень свободы.

8°. Частный случай *плоского движения* — качение цилиндра (рис. 2.8). Его можно представить как сумму вращения вокруг какой-либо оси, параллельной образующей цилиндра, и поступательного движения со скоростью, равной скорости точек цилиндра, лежащих на этой оси. При любом выборе оси угловая скорость  $\omega$  одна и та же. В качестве оси вращения удобно выбирать либо ось  $O$  цилиндра, либо линию  $O'$  касания цилиндра с поверхностью, по которой он катится. Если качение происходит *без проскальзывания*, то скорости точек на линии касания  $O'$  равны нулю, а скорость любой другой точки цилиндра будет такой же, как при вращении с той же угловой скоростью вокруг неподвижной оси, проходящей через линию касания  $O'$  (*мгновенная ось вращения*).

Распределение скоростей точек, лежащих на вертикальном диаметре, показано на рис. 2.8, а. Например, скорость точки  $A$  равна  $v_A = \omega \cdot 2R$ , так как она находится на расстоянии  $2R$  от мгновенной оси  $O'$ . Ее же можно представить как сумму скорости  $v$  оси  $O$  цилиндра и скорости  $\omega R$ , обусловленной вращением вокруг оси цилиндра (рис. 2.8, б):  $v_A = v + \omega R = 2\omega R$ , так как при качении без проскальзывания  $v = \omega R$ . Точки оси цилиндра движутся прямолинейно; точки поверхности цилиндра — по циклоидам; точки, находящиеся между осью и поверхностью, — по трохоидам (кривым, похожим на циклоиду, но со сглаженными углами).

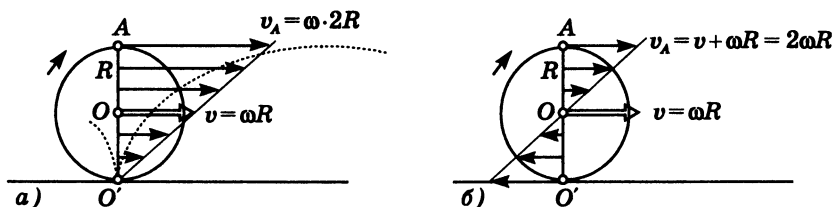


Рис. 2.8.

Качение цилиндра

9°. Пример *вращения вокруг неподвижной точки* — качение без проскальзывания конуса  $B$  по поверхности неподвижного конуса  $A$ , имеющего с ним общую вершину  $O$  (рис. 2.9).

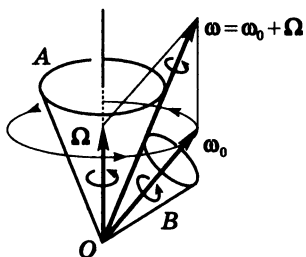


Рис. 2.9.

Вращение вокруг  
неподвижной точки

Такое движение можно представить либо как чистое вращение конуса  $B$  с угловой скоростью  $\omega$  вокруг мгновенной оси, проходящей по линии касания, либо как сумму двух вращений: с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг собственной оси и с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси неподвижного конуса  $A$ :

$$\omega = \omega_0 + \Omega. \quad (2.17)$$

Это значит, что скорость любой точки катящегося конуса определяется по формуле (2.16), в которую можно подставить  $\omega$  из (2.17). Точки оси подвижного конуса движутся по окружностям, а не лежащие на оси точки описывают сложные волнообразные траектории.

## 2.2. Динамика

1°. *Динамика* изучает механическое движение тел, используя представление об их *взаимодействии*. Взаимодействие тел — это причина *изменения скорости* их движения, т. е. *ускорения*. Ускорение тела не может быть задано произвольно: его значение в данный момент не зависит от предшествующего движения тела и определяется положением и движением окружающих тел. Основу динамики составляют три закона Ньютона.

*Первый закон Ньютона (закон инерции)* позволяет выбрать системы отсчета, в которых законы движения выглядят наиболее просто: *существуют такие системы отсчета (называемые инерциальными), в которых движение свободного тела происходит равномерно и прямолинейно* (с постоянной скоростью  $v$ ).

В таких системах отсчета покой или равномерное движение (движение «по инерции») представляет собой естественное состояние, а динамика должна объяснить изменение этого состояния (т. е. ускорение тела). Свободных тел, не подверженных

воздействию со стороны других тел, строго говоря, не существует. Однако благодаря убыванию всех известных взаимодействий с увеличением расстояния такое тело можно реализовать с любой требуемой точностью. Опыт показывает, что *гелиоцентрическая система отсчета* (связанная с Солнцем и «неподвижными» звездами) является инерциальной в рамках достижимой в настоящее время точности измерений.

*Второй закон Ньютона* связывает ускорение тела с действующими силами и его массой: *в инерциальной системе отсчета ускорение тела пропорционально векторной сумме действующих на него сил и обратно пропорционально массе тела:*

$$\mathbf{a} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{m}. \quad (2.18)$$

Сила — это физическая величина, характеризующая взаимодействие тел. *Измерение сил* любой физической природы основывается на свойстве сил вызывать *деформацию упругих тел* и осуществляется с помощью динамометров.

Опыт показывает, что сила — векторная физическая величина, т. е. на нее распространяются правила действий с векторами (п. М8.1.1°). В частности, под действием нескольких сил (даже разной физической природы) движение происходит так же, как под действием одной силы (*равнодействующей*), равной векторной сумме всех отдельных сил.

Одна и та же сила разным телам сообщает различные ускорения. Чем меньше ускорение, тем больше *инертность* тела. Физическая величина, количественно характеризующая свойство инертности тела, называется *массой*. Измерение массы может основываться на сравнении ускорений, сообщаемых данному телу и эталонному телу одной и той же силой: отношение масс равно обратному отношению модулей ускорений. Такое динамическое измерение масс атомов и молекул производится в *масс-спектрометрах*, принцип действия которых основан на отклонении пучков ионов электрическими и магнитными полями. В этих измерениях используется *атомная единица мас-*

сы (а. е. м.), равная  $1/12$  части массы нуклида (ядра) углерода-12:

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Массы макроскопических тел на практике измеряют *взвешиванием*, т. е. сравнением действующей на тело силы тяготения с силой тяготения, действующей в том же гравитационном поле на эталон массы (гирю). Измерение массы взвешиванием основано на законе пропорциональности инертной и гравитационной масс (п. 2.3.1°).

Как показывает опыт, масса представляет собой аддитивную скалярную величину, не зависящую от положения тела и его скорости (при условии, что скорость тела много меньше скорости света).

Отношение массы  $m$  тела к его объему  $V$  называется *плотностью*:

$$\rho = m/V.$$

Плотности некоторых веществ приведены в п. 2.8.5°.

*Третий закон Ньютона* количественно характеризует взаимодействие тел: *силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и противоположны по направлению*:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.19)$$

В частности, третьему закону Ньютона удовлетворяют силы гравитационного воздействия (закон всемирного тяготения, см. п. 2.3.1°) и электростатического взаимодействия (закон Кулона, см. п. 4.1.1°). Силы взаимодействия материальных точек имеют *центральный характер*, т. е. направлены вдоль соединяющей их прямой. Третий закон предполагает мгновенное распространение взаимодействий, поэтому для взаимодействующих на расстоянии движущихся тел он справедлив лишь при достаточно медленных по сравнению со скоростью света движениях (§ 7.1).

Отметим, что сформулированная здесь логическая схема динамики не является единственно возможной. Дело в том, что такие важные понятия динамики, как сила и масса, невоз-

можно ввести независимо от самих законов динамики, т. е. вне ее рамок. Поэтому возникает некоторый произвол в том, какие положения рассматривать в качестве определений соответствующих величин, а какие считать утверждениями, проверяемыми на опыте. Например, процедуру измерения массы можно вводить по определению на основе третьего закона Ньютона: за отношение масс примем обратное отношение модулей ускорений двух тел при их взаимодействии друг с другом:

$$m_1/m_2 = a_2/a_1.$$

При таком измерении массы тела не используется понятие действующей на него силы. Теперь утверждение второго закона Ньютона об обратной пропорциональности ускорения тела его массе становится проверяемым на опыте положением, а не определением массы. Но физическое содержание третьего закона при этом сводится к утверждению: отношение модулей ускорений двух взаимодействующих тел будет всегда одним и тем же независимо от характера их взаимодействия, а векторы ускорений направлены в противоположные стороны.

Еще одна непротиворечивая логическая схема возникает, когда способ измерения сил основывается не на их свойстве вызывать упругую деформацию, а на пропорциональности ускорения вызывающей его силе.

**2°. Импульс** материальной точки — это произведение ее массы на скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Поскольку  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , то второй закон Ньютона (2.18) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.20)$$

Второй закон Ньютона в форме (2.20) справедлив и при движении со скоростями, близкими к предельной скорости  $c$  (скорости света).



Любая система отсчета, движущаяся относительно гелиоцентрической без ускорения, также является инерциальной. Законы Ньютона справедливы во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что никакими механическими опытами в изолированной физической системе нельзя установить, покоится она или движется как целое без ускорения относительно гелиоцентрической системы отсчета. Это утверждение выражает содержание *механического принципа относительности* или *принципа относительности Галилея* (п. 7.2.1°).

3°. В динамике различают два вида задач, решаемых с помощью второго закона Ньютона. Задачи первого вида заключаются в *определении сил по известному движению тела*. Классический пример — установление характера зависимости силы тяготения от расстояния на основе известных из астрономических наблюдений законов движения планет. В частности, третий закон Кеплера (п. 2.5.1°) утверждает, что для круговых орбит квадраты периодов обращения пропорциональны кубам радиусов орбит:  $T^2 \sim r^3$ . Поскольку при равномерном движении по окружности  $v = 2\pi r/T$ , а ускорение  $a$  направлено к центру и равно по модулю  $v^2/r$ , то действующая на планету сила, согласно второму закону Ньютона, равна

$$F = ma = m \frac{v^2}{r} = m \frac{(2\pi r/T)^2}{r}. \quad (2.21)$$

Учитывая, что  $T^2 \sim r^3$ , получаем  $F \sim m/r^2$  — сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от планеты до Солнца и прямо пропорциональна массе  $m$  планеты. Так как роль планеты и Солнца в их гравитационном взаимодействии одинакова, то сила тяготения должна быть пропорциональна и массе  $M$  Солнца:

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

(п. 2.3.1°). Значение гравитационной постоянной  $G$  нельзя получить из астрономических наблюдений — для этого требуется лабораторный эксперимент (опыт Кэвендиша).

4°. Задачи второго вида состоят в *определении характера движения тела, если известны действующие на него силы и начальное механическое состояние* — положение и скорость в начальный момент. Простейший пример такой задачи — движение материальной точки в однородном постоянном (не зависящем от времени) поле. В частности, для движения материальной точки в поле тяготения вблизи поверхности Земли без учета сопротивления воздуха второй закон Ньютона приводится к виду

$$\frac{dv}{dt} = g.$$

Интегрирование этого уравнения с начальными условиями

$$v(0) = v_0, \quad r(0) = r_0.$$

дает

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + gt, \\ r(t) &= r_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

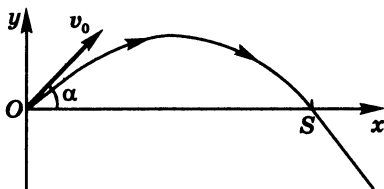


Рис. 2.10.  
Траектория  
в поле тяжести

Траектория материальной точки лежит в плоскости, задаваемой векторами  $v_0$  и  $g$  (рис. 2.10). Вводя в этой плоскости оси координат  $x, y$  (п. М8.3.2°), из (2.22) получаем проекции скорости и координаты точки как функции времени:

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt; \quad (2.23)$$

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \quad (2.24)$$

где  $\alpha$  — угол, образуемый начальной скоростью с осью  $x$ . Исключая время  $t$  из уравнения (2.24), получаем уравнение траектории (рис. 2.10)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) описывает семейство параболических траекторий, зависящее от двух параметров:  $\alpha$  и  $v_0$ . Решение задач о свободном падении сводится к исследованию этого уравнения.

### Примеры

1) Дальность  $s$  полета по горизонтали находится из (2.25), если положить  $y(s) = 0$  (рис. 2.10):

$$s = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.26)$$

Максимальная дальность (при заданном значении  $v_0$ ) достигается при  $\alpha = 45^\circ$ ;  $s_{\max} = v_0^2/g$ .

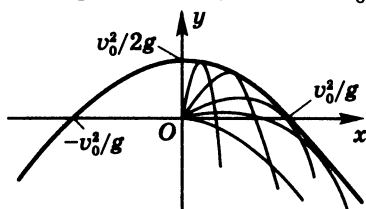


Рис. 2.11.

Граница достижимых целей

2) Граница достижимых целей при заданной начальной скорости определяется из уравнения траектории (2.25), если при фиксированном значении  $x$  найти самую высокую точку, в которую еще может попасть тело. Для этого нужно найти

максимум  $y$  как функции угла  $\alpha$ , что сводится к исследованию квадратного трехчлена (п. М2.4.2°) относительно тангенса угла  $\alpha$ . Трехчлен имеет максимум при  $\operatorname{tg} \alpha = v_0^2/(gx)$ . Подстановка этого значения в (2.25) дает уравнение искомой границы (рис. 2.11):

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (2.27)$$

Граница (2.27) является огибающей семейства параболических траекторий (2.25) с фиксированным значением  $v_0$  и сама представляет собой параболу с вершиной при  $x = 0$ ,  $y = v_0^2/2g$ .

5°. В динамике встречаются также задачи, которые нельзя отнести ни к одному из указанных видов: некоторые силы заданы, а другие — как правило, *силы реакции* связей — сами подлежат определению. Для решения таких задач, кроме второго закона Ньютона, необходимо учитывать ограничения, налагаемые связями на рассматриваемое движение.

### Пример

Конический маятник длины  $l$  совершает вращение с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.12). Сила тяжести  $mg$  задана, а сила натяжения  $T$  неизвестна. Второй закон Ньютона:  $ma = T + mg$ . Из характера движения ясно, что вектор  $ma$  направлен горизонтально к центру окружности. Из подобия треугольников на рис. 2.12 следует  $T/(ma) = l/R$ . Так как  $a = \omega^2 R$ , то для силы натяжения нити получаем  $T = m\omega^2 l$ . Поскольку  $T$  — гипотенуза, а  $mg$  — катет, то  $T > mg$ , откуда  $\omega^2 > g/l$  — только при выполнении этого неравенства возможно указанное движение. Угол отклонения от вертикали, как видно из рис. 2.12, определяется соотношением  $\cos \alpha = mg/R = g/(\omega^2 l)$ .

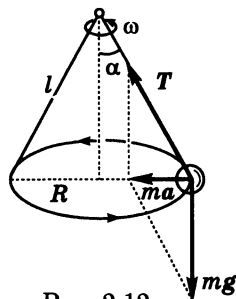


Рис. 2.12.  
Конический маятник

### 2.3. Силы тяготения, трения и упругости

Законы Ньютона определяют движение тела независимо от природы сил, вызывающих ускорение. Все многообразие взаимодействий в природе сводится к четырем типам: *гравитационное, электромагнитное, слабое и сильное*. Область проявления сильных и слабых взаимодействий ограничивается процессами в атомных ядрах и превращениями элементарных частиц (п. 7.6.2°, § 7.7). Существует теория, в которой электромагнитное и слабое взаимодействия рассматриваются как разные проявления единого *электрослабого* взаимодействия. Дальнедействующие гравитационное и электромагнитное взаимодействия определяют все макроскопические явления.

1°. Гравитационное взаимодействие описывается законом всемирного тяготения: *две материальные точки притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.28)$$

Гравитационная постоянная  $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .

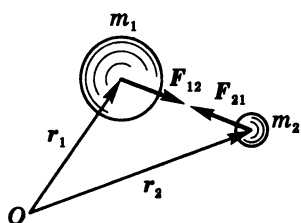


Рис. 2.13.  
Закон всемирного  
тяготения

В векторном виде закон всемирного тяготения записывается следующим образом (рис. 2.13):

$$\mathbf{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (2.29)$$

Выражения (2.28), (2.29) справедливы и для взаимодействия точечной массы с шаром, имеющим сферически-симметричное распределение массы, и для гравитационного взаимодействия двух шаров. При этом под  $r$  нужно понимать расстояние между их центрами. Движение тел (планет, спутников) под действием гравитационных сил рассматривается в п. 2.5.2°.

Источником поля тяготения является *гравитационная масса* (или гравитационный заряд) тела  $m_{\text{гр}}$ , подобно тому как электрический заряд  $q$  является источником электрического поля. Это видно из сравнения закона всемирного тяготения (2.28) и закона Кулона (п. 4.1.1°). Опыт показывает, что *гравитационная масса тела  $m_{\text{гр}}$  пропорциональна его инертной массе  $m_{\text{ин}}$* , входящей во второй закон Ньютона. Это позволяет использовать для измерения  $m_{\text{гр}}$  те же единицы, что и для  $m_{\text{ин}}$ . Появление размерной гравитационной постоянной  $G$  в (2.28) обусловлено тем, что единицы всех входящих в закон всемирного тяготения величин уже выбраны (независимо от этого закона).

Пропорциональность инертной и гравитационной масс проверена на опыте с относительной погрешностью до  $10^{-12}$ . Неразрывная связь физических величин, характеризующих инертные и гравитационные свойства, проявляется в том, что свободное падение всех тел в заданном поле тяготения происходит с одинаковым ускорением.

Ускорение  $g$ , сообщаемое телу силой тяготения Земли (*ускорение свободного падения*, напряженность гравитационного поля Земли), получаем, подставляя выражение для силы

(2.28) в правую часть второго закона Ньютона (2.18):

$$g(r) = G \frac{M}{r^2}, \quad (2.30)$$

где  $M$  — масса Земли,  $r$  — расстояние до центра Земли. Представляя  $r$  в виде  $R + h$  ( $R$  — радиус Земли), находим зависимость ускорения свободного падения  $g$  от высоты  $h$  над поверхностью Земли:

$$g(h) = \frac{g_0}{(1 + h/R)^2} \approx g_0 (1 - 2h/R), \quad (2.31)$$

где  $g_0 = GM/R^2 = 9,80665 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли. В действительности из-за сплюснутости Земли у полюсов и ее суточного вращения ускорение свободного падения зависит и от географической широты места: первая причина уменьшает  $g$  на экваторе на 0,18% по сравнению с его значением на полюсе, вторая уменьшает  $g$  еще на 0,34%.

2°. Силы трения и силы упругости — это разные проявления электромагнитного взаимодействия. Различают три вида трения при соприкосновении твердых тел: трение скольжения, трение покоя и трение качения.

Сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел противоположно относительной скорости (рис. 2.14). Сила трения  $F_{\text{тр}}$  и нормальная сила реакции  $N$  являются составляющими одной силы  $Q$ , с которой поверхность действует на тело. Модули этих сил связаны между собой установленным на опыте приближенным законом Кулона — Амонтона:

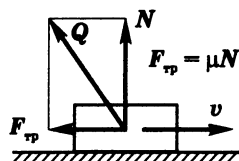


Рис. 2.14.  
Трение скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \quad (2.32)$$

Коэффициент трения  $\mu$  зависит от рода соприкасающихся поверхностей и степени их обработки. Он не зависит от площади соприкосновения тел и слабо зависит от скорости. Этой зависимостью обычно пренебрегают. Трение скольжения всегда

связано с превращением механической энергии во внутреннюю (в теплоту, см. п. 3.1.4°).

*Сила трения покоя* может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, которое обычно считают равным силе трения скольжения. Сила трения покоя определяется условием равновесия тела (п. 2.6.1°).

Трение качения возникает из-за деформации материала перед катящимся телом и из-за разрыва временно образующихся молекулярных связей в месте контакта. *Сила трения качения* обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. Обычно сила сопротивления перекачиванию гораздо меньше силы трения скольжения, однако при больших скоростях качения, сравнимых со скоростью распространения деформации (скоростью звука в веществе), она резко возрастает.

#### Пример

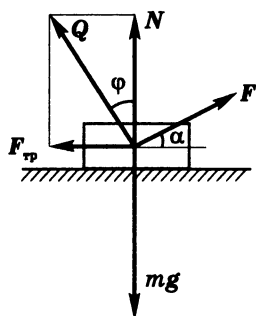


Рис. 2.15.

Силы, действующие  
на ящик

К находящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности ящику приложена сила  $F$  под углом  $\alpha$  к горизонту. На рис. 2.15 показаны и все остальные действующие на ящик силы. Уравнение второго закона Ньютона:

$$F + mg + N + F_{\text{тр}} = ma. \quad (2.33)$$

Если ящик остается в покое или движется вдоль поверхности, то вертикальная составляющая его ускорения равна нулю, и проекция уравнения (2.33) на ось  $y$  позволяет определить силу нормальной реакции  $N$ :

$$\begin{aligned} F \sin \alpha - mg + N &= 0, \\ N &= mg - F \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ящик не отрывается от поверхности при  $N > 0$ , т. е.  $F \sin \alpha < mg$ .

Проекция уравнения (2.33) на ось  $x$  позволяет найти ускорение ящика, если он движется, или силу трения покоя:

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = ma. \quad (2.35)$$

Если ящик движется, то сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha),$$

и (2.35) дает

$$a = \frac{F}{m}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g.$$

Ящик действительно движется при  $a > 0$ , т. е. при

$$F > \frac{\mu}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} mg.$$

При противоположном неравенстве ящик покоится ( $a = 0$ ), и из (2.35) находится сила трения покоя:  $T_{\text{тр}} = F \cos \alpha$ . Отметим, что силы  $N$  и  $F_{\text{тр}}$  можно рассматривать как составляющие одной силы  $Q$ , действующей на ящик со стороны поверхности (рис. 2.15). При скольжении ящика, когда  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , коэффициент трения  $\mu$  равен тангенсу угла  $\varphi$ , образуемого силой  $Q$  с вертикалью:  $\operatorname{tg} \varphi = F_{\text{тр}}/N = \mu$ .

*Силы упругости* определяются взаимным расположением взаимодействующих тел и возникают при их деформациях (п. 3.6.2°).

## 2.4. Законь сохрания

1°. *Импульсом*  $P$  системы частиц (материальных точек) называется векторная сумма импульсов  $p_i = m_i v_i$  отдельных частиц:

$$P = \sum_i m_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.36)$$

Скорость изменения импульса отдельной частицы определяется вторым законом Ньютона:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + \sum_{k \neq i} F_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.37)$$

где  $F_{ik}$  — сила, с которой  $k$ -я частица системы действует на  $i$ -ю, а  $F_i$  — сила, с которой на  $i$ -ю частицу действуют тела, не входящие в состав рассматриваемой системы (*внешняя сила*).



По третьему закону Ньютона  $F_{ik} = -F_{ki}$ . Суммируя выражения (2.37) для всех частиц, находим *закон изменения импульса системы частиц*:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (2.38)$$

т. е. скорость изменения импульса системы частиц определяется суммой *внешних сил*, действующих на частицы системы.

Если действующие на частицы внешние силы неизменны в течение промежутка времени  $\Delta t$ , то (2.38) можно записать в виде

$$\Delta \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta t.$$

Произведение  $\mathbf{F}_i \Delta t$  называется *импульсом силы  $\mathbf{F}_i$* . *Изменение импульса системы частиц равно суммарному импульсу внешних сил.*

В *замкнутой системе* внешние силы отсутствуют и импульс системы частиц остается неизменным ( $\mathbf{P} = \text{const}$ ), несмотря на то, что импульсы отдельных частиц могут изменяться при их взаимодействии (*закон сохранения импульса*). Если в *незамкнутой системе* равна нулю проекция *внешних сил* на какое-либо направление, то сохраняется *проекция импульса системы частиц на данное направление*.

**2°. Центр масс** (центр инерции) — это точка, радиус-вектор которой дается выражением

$$\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / \sum_i m_i, \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор частицы, имеющей массу  $m_i$ . Центр масс двух одинаковых частиц находится в середине соединяющего их отрезка; для разных частиц центр масс делит этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам частиц.

Если однородное тело обладает центром, осью или плоскостью симметрии, то центр масс находится соответственно в центре симметрии, на оси или в плоскости симметрии (§ М8.4).

Центр масс тела совпадает с его *центром тяжести* в однородном поле тяготения (т. е. совпадает с точкой приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела).

Практический способ нахождения центра масс плоской фигуры: подвесим тело в поле тяжести так, чтобы оно могло свободно поворачиваться вокруг точки подвеса  $O_1$  (рис. 2.16). В равновесии центр масс  $C$  находится на одной вертикали с точкой подвеса (ниже ее), так как равен нулю момент силы тяжести (п. 2.6.1°), которую можно считать приложенной в центре масс. Изменяя точку подвеса, таким же способом находим еще одну прямую  $O_2C$ , проходящую через центр масс. Положение центра масс дается точкой пересечения этих прямых.

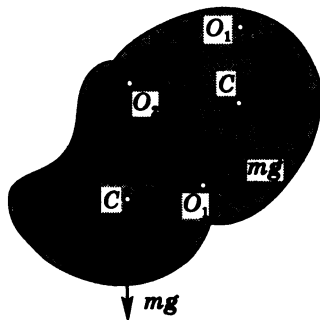


Рис. 2.16.  
Нахождение центра масс  
плоской фигуры

Скорость центра масс

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i}. \quad (2.40)$$

Импульс системы частиц (2.36) равен произведению массы всей системы  $M = \sum_i m_i$  на скорость ее центра масс  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{V}. \quad (2.41)$$

Центр масс характеризует движение системы как целого.

**3°. Закон изменения импульса системы частиц (2.38) по существу представляет собой закон движения центра масс (цен-**

тра инерции). Скорость изменения импульса равна произведению массы системы частиц на ускорение центра масс:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Из (2.38) следует, что в каждый момент центр масс всей системы движется так, как двигалась бы материальная точка массы  $M$  под действием силы, равной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы:

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i. \quad (2.42)$$

Центр масс *замкнутой системы* движется с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$  либо покоится, хотя скорости входящих в систему частиц могут изменяться в результате их взаимодействия.

Закон сохранения импульса *универсален*, т. е. выполняется во всех замкнутых системах при любых взаимодействиях. Эта универсальность обусловлена тем, что сохранение импульса связано не с какими-то конкретными видами взаимодействий, а с общим свойством однородности пространства.

4°. Закон сохранения импульса объясняет *принцип реактивного движения*. Если двигатель ракеты выбрасывает газы со скоростью  $v_{\text{отн.}}$  относительно ракеты, то уравнение движения ракеты (*уравнение Мещерского*) имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = v_{\text{отн.}} \frac{dm}{dt} + \mathbf{F}, \quad (2.43)$$

где  $m$  — изменяющаяся масса ракеты,  $dm/dt$  — скорость ее изменения ( $dm/dt < 0$ , так как масса ракеты убывает),  $\mathbf{F}$  — действующие на ракету внешние силы (сила сопротивления атмосферы, сила тяжести). Если внешних сил нет и скорость истечения газов  $v_{\text{отн.}}$  постоянна, то уравнение (2.43) приводится к виду  $dm/dv = -(1/v_{\text{отн.}}) m$  (п. М5.5.1°), и приобретаемая ракетой скорость связана с ее начальной ( $m_0$ ) и конечной ( $m$ ) массами *формулой Циолковского*:

$$m = m_0 \exp(-v/v_{\text{отн.}}). \quad (2.44)$$

5°. *Работой силы  $\mathbf{F}$*  при элементарном перемещении  $\Delta\mathbf{r}$  тела, к которому она приложена, называется скалярное произведение (п. М8.1.4°)

$$\Delta A = \mathbf{F} \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos \alpha. \quad (2.45)$$

Работа положительна, если угол  $\alpha$  между силой  $\mathbf{F}$  и перемещением  $\Delta\mathbf{r}$  острый, отрицательна, если тупой, и равна нулю, если сила  $\mathbf{F}$  перпендикулярна перемещению  $\Delta\mathbf{r}$ .

Если на тело действует несколько сил  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ , то работа равнодействующей силы  $\mathbf{F}$  (т. е. векторной суммы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$ ) равна сумме работ отдельных сил:  $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ . Работа  $A$  силы при перемещении тела по некоторой траектории равна сумме работ  $\Delta A$  этой силы на отдельных элементарных участках  $\Delta\mathbf{r}$ .

*Кинетической энергией  $E_k$*  материальной точки называется физическая величина

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (2.46)$$

Кинетическая энергия аддитивна: для системы частиц она равна сумме кинетических энергий отдельных частиц системы:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}. \quad (2.47)$$

Изменение  $\Delta E_k$  кинетической энергии материальной точки равно работе  $A$  равнодействующей всех действующих на нее сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (2.48)$$

Изменение кинетической энергии системы частиц равно сумме работ всех действующих в системе сил, как внешних, так и внутренних. Эти утверждения непосредственно следуют из второго закона Ньютона. Кинетическая энергия и работа имеют разные значения в различных инерциальных системах отсчета, однако выражение (2.48) справедливо для всех систем.

**6°.** Все силы, действующие на частицы, можно разбить на потенциальные и непотенциальные. Силы называются *потенциальными*, если их работа при изменении положения частиц не зависит от траекторий, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы. Примеры потенциальных сил — сила тяжести, кулоновская сила взаимодействия заряженных частиц, сила упругости. Работа *непотенциальных* сил зависит от формы пути. Силы трения дают пример непотенциальных сил.

*Потенциальной энергией*  $U$  частицы в некоторой точке называется работа потенциальных сил, совершаемая при перемещении частицы из данной точки в точку, потенциальная энергия в которой принята равной нулю. Выбор точки с нулевой потенциальной энергией произволен, поэтому потенциальная энергия определена неоднозначно (с точностью до аддитивной постоянной).

Работа  $A_{12}$  потенциальных сил при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 равна разности начального ( $U_1$ ) и конечного ( $U_2$ ) значений потенциальной энергии:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad \text{или} \quad A = -\Delta U, \quad (2.49)$$

где  $\Delta U = U_2 - U_1$  — изменение потенциальной энергии.

Потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц равна работе, совершаемой всеми потенциальными силами (как внешними, так и внутренними) при переходе системы из данной конфигурации в некоторую конфигурацию, потенциальная энергия в которой принята равной нулю. Потенциальная энергия системы частиц состоит из потенциальной энергии взаимодействия частиц друг с другом и их потенциальной энергии во внешнем потенциальном поле. В отличие от аддитивной энергии частиц во внешнем поле потенциальная энергия их взаимодействия между собой не распадается на сумму энергий отдельных частиц. Она зависит только от взаимного расположения частиц, входящих в систему.

Потенциальная энергия тяготения точечных масс или тел со сферически-симметричным распределением масс  $m_1$  и  $m_2$  дается выражением

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2.50)$$

Здесь потенциальная энергия считается равной нулю при бесконечно большом расстоянии  $r$  между телами. Для тела в поле тяготения Земли эту формулу удобно записать в виде

$$U = -mg \frac{R^2}{r}, \quad (2.51)$$

где  $g = GM/R^2$  — ускорение свободного падения у поверхности Земли,  $M$  — масса Земли,  $R$  — радиус Земли.

В однородном поле тяжести ( $g = \text{const}$ ) потенциальная энергия тела массы  $m$  равна

$$U = mgh, \quad (2.52)$$

где  $h$  — высота тела над уровнем с нулевой потенциальной энергией.

Потенциальная энергия кулоновского взаимодействия (п. 4.1.7°) двух точечных зарядов

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (2.53)$$

В случае отталкивания зарядов ( $q_1 q_2 > 0$ ) потенциальная энергия положительна, в случае притяжения ( $q_1 q_2 < 0$ ) — отрицательна.

Потенциальная энергия тела при упругой деформации, описываемой законом Гука (п. 3.6.2°), пропорциональна квадрату деформации. Например, для растянутой (сжатой) пружины или стержня

$$U = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2. \quad (2.54)$$

7°. *Механической энергией*  $E$  называют сумму кинетической энергии  $E_k$  и потенциальной энергии  $U$ :

$$E = E_k + U. \quad (2.55)$$

Механическая энергия зависит от координат и скоростей всех частиц, входящих в систему, т. е. является функцией механического состояния. *Изменение механической энергии определяется суммой работ всех действующих в системе непотенциальных сил (внешних и внутренних):*

$$E_2 - E_1 = A_{\text{непот.}} \quad (2.56)$$

*Закон сохранения механической энергии* вытекает из (2.48), если входящую в его правую часть работу потенциальных сил выразить через изменение потенциальной энергии. Отметим, что работу внешних потенциальных сил можно оставить в явном виде в правой части (2.56), но под механической энергией системы  $E$  в этом случае следует понимать сумму кинетической энергии и потенциальной энергии только взаимодействия частиц системы друг с другом.

Системы, в которых механическая энергия сохраняется, называются *консервативными*. Этим свойством обладают системы, в которых отсутствуют непотенциальные силы, а внешние силы постоянны.

8°. *Столкновениями* называют разнообразные процессы взаимодействия между телами при условии, что на достаточно большом расстоянии друг от друга тела можно рассматривать как свободные. В результате столкновения тел могут соединиться в одно тело (*абсолютно неупругий удар*), могут возникнуть новые тела (распад частиц или реакции, см. п. 7.6.3°), тела могут разойтись, изменив свое внутреннее состояние или не изменив его. В последнем случае столкновение называется *абсолютно упругим ударом*.

При *абсолютно неупругом ударе* скорость образовавшегося тела массы  $m_1 + m_2$  определяется законом сохранения импульса: она равна скорости центра масс сталкивающихся тел до удара

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.57)$$

При рассмотрении *упругих столкновений* удобно одну из частиц до столкновения считать покоящейся:  $v_2 = 0$ . Тогда законы сохранения импульса и энергии записываются в виде

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}, \quad (2.58)$$

где штрихом отмечены скорости частиц после столкновения. При *лобовом (центральном) соударении* из (2.58) получаем (п. М3.6.3°)

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.59)$$

При  $m_1 > m_2$  налетающая частица после удара движется в ту же сторону с меньшей скоростью, при  $m_1 = m_2$  она останавливается, а при  $m_1 < m_2$  отскакивает назад.

При *нецентральной упругом* ударе частиц одинаковой массы ( $m_1 = m_2$ ) после удара, как следует из (2.58), они разлетаются под прямым углом, а угол, на который изменяется направление скорости налетающей частицы (*угол рассеяния*), может иметь любое значение в пределах от 0 до 90° в зависимости от «прицельного расстояния», т. е. расстояния между направлением скорости налетающей частицы и центром покоящейся частицы. Если налетающая частица легче частицы-мишени ( $m_1 < m_2$ ), то она может отклониться на любой угол (даже рассеяться назад), а *угол разлета* частиц — тупой. Тяжелая частица ( $m_1 > m_2$ ) при столкновении с легкой не может отклониться на угол, превышающий  $\varphi_{\max} = \arcsin(m_2/m_1)$ , а угол разлета — острый. Например, при упругом рассеянии дейтронов на неподвижных протонах ( $m_2/m_1 = 1/2$ ) угол рассеяния не может превышать 30°.

Движущаяся частица при упругом столкновении с неподвижной частицей такой же массы может передать последней значительную часть своей энергии (при лобовом столкновении, как видно из (2.59), энергия передается полностью). Однако при упругих столкновениях между частицами с большим различием масс (таких, как электроны и ионы) обмен энергией затруднен: легкая частица «отскакивает» от неподвижной



тяжелой как от стенки, передавая тяжелой лишь ничтожную часть (порядка  $m_1/m_2 \ll 1$ ) своей энергии. Поэтому в смеси таких частиц (плазме) быстро устанавливается термодинамическое равновесие (п. 3.1.1°) в каждой из подсистем (легкой и тяжелой), но выравнивание средних кинетических энергий (п. 3.2.4°) легких и тяжелых частиц происходит медленно (за большое число столкновений), и плазму обычно характеризуют двумя различными температурами: электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$ .

## 2.5. Движение в центральном поле тяготения

1°. При движении в центральном поле тяготения выполняются законы сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = E_0 \quad (2.60)$$

и момента импульса, равного векторному произведению радиус-вектора частицы на ее импульс:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{L}_0. \quad (2.61)$$

Пример такого движения — обращение планет вокруг Солнца в пренебрежении их влиянием друг на друга, для которого справедливы три закона Кеплера (рис. 2.17):

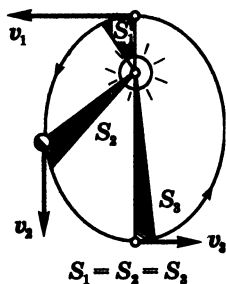


Рис. 2.17.

Эллиптическая орбита планеты

1) планета движется по эллипсу (п. М9.3.2°), в одном из фокусов которого находится Солнце;

2) радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает («заметает») равные площади;

3) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит:

$$T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3. \quad (2.62)$$

Движение по замкнутой эллиптической (в частном случае по круговой) орбите происходит при  $E_0 < 0$  — отрицательной полной энергии. При  $E_0 = 0$  траектория представляет собой

параболу, при  $E_0 > 0$  — гиперболу с фокусом в силовом центре (в Солнце).

2°. *Первой космической скоростью*  $v_1$  или *круговой скоростью* называется горизонтальная начальная скорость, при которой тело становится спутником Земли, движущимся по круговой орбите:

$$v_1 = \sqrt{GM/r}, \quad (2.63)$$

где  $M$  — масса Земли,  $r$  — радиус круговой орбиты спутника. Вблизи поверхности Земли, когда  $r \approx R$  ( $R$  — радиус Земли), значение первой космической скорости

$$v_1 = \sqrt{GM/R} = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с} \quad (2.64)$$

( $g = GM/R^2$  — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли).

*Вторая космическая скорость*  $v_{II}$  (скорость убегания, скорость освобождения, *параболическая скорость*) — минимальная скорость вблизи поверхности Земли, при которой тело может удалиться на бесконечное расстояние (если не учитывать притяжение Солнца). Ее значение определяется из закона сохранения энергии:

$$v_{II} = \sqrt{2}v_1 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (2.65)$$

Тело удалится на бесконечность независимо от того, в каком направлении сообщена ему вторая космическая скорость. Параболические траектории при этом будут различными.

Скорости, удовлетворяющие неравенству  $v_1 < v < v_{II}$ , называются *эллиптическими* (им соответствуют эллиптические орбиты), а неравенству  $v > v_{II}$  — *гиперболическими*.

*Третья космическая скорость* соответствует скорости освобождения тела из поля тяготения Солнца с расстояния, равного радиусу земной орбиты ( $r \approx 1,5 \cdot 10^{11}$  м):

$$v = \sqrt{2}v_{орб.} \approx 42,1 \text{ км/с}$$

( $v_{орб.} \approx 29,8$  км/с — орбитальная скорость Земли). Если использовать орбитальное движение Земли, то дополнительная скорость при выходе из земного поля тяготения должна быть

$(\sqrt{2} - 1) v_{\text{орб.}} \approx 12,3 \text{ км/с}$ . Для этого у поверхности Земли телу нужно сообщить скорость

$$v_{\text{II}} = \left[ (\sqrt{2} - 1)^2 v_{\text{орб.}}^2 + v_{\text{II}}^2 \right]^{1/2} \approx 16,6 \text{ км/с.} \quad (2.66)$$

Пример

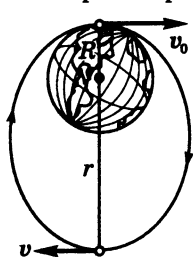


Рис. 2.18.

К нахождению  
апогея орбиты  
спутника

Спутнику сообщают вблизи поверхности Земли эллиптическую скорость  $v_0$  ( $v_I < v_0 < v_{\text{II}}$ ) в горизонтальном направлении. Определим расстояние до апогея эллиптической орбиты (рис. 2.18).

Закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv^2}{2} - mg\frac{R^2}{r} \quad (2.67)$$

дает уравнение, содержащее две неизвестные величины: расстояние  $r$  до апогея и скорость  $v$  в апогее. Второе уравнение получаем с помощью закона сохранения момента импульса (второго закона Кеплера): учитывая, что в перигее и апогее эллиптической траектории скорость перпендикулярна радиусу-вектору спутника, имеем

$$v_0 R = vr. \quad (2.68)$$

Подставляя  $v$  из (2.68) в (2.67), получаем квадратное уравнение относительно  $r$ , корни которого равны  $R$  и  $v_0^2 R / (2gR - v_0^2)$ . Первый корень соответствует перигею, второй — апогею орбиты. При  $v_0 \rightarrow v_{\text{II}} = \sqrt{2gR}$  апогей уходит в бесконечность — эллиптическая орбита превращается в параболическую.

## 2.6. Механическое равновесие

1°. *Статика* изучает условия равновесия тел. Во многих практически важных задачах статики можно использовать модель *абсолютно твердого тела*, т. е. тела, размеры и форма которого считаются неизменными.

В инерциальной системе отсчета твердое тело находится в равновесии, если векторная сумма всех действующих на тело внешних сил и векторная сумма *моментов* этих сил равны нулю:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad (2.69)$$

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (2.70)$$

В определении момента силы как векторного произведения  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  (§ M8.2) выбор общего начала для радиус-векторов  $\mathbf{r}_i$  точек приложения всех действующих сил произволен. Поэтому такое начало выбирается только по соображениям удобства: уравнение моментов сил (2.70) будет тем проще, чем большее число сил будет иметь равные нулю моменты.

При выполнении условия (2.69) равно нулю ускорение центра масс, при выполнении условия (2.70) отсутствует угловое ускорение вращения.

2°. Для плоской системы сил векторное уравнение (2.69) сводится к двумя скалярным:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad (2.71)$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad (2.72)$$

если расположить оси  $x$ ,  $y$  в плоскости действия сил. Векторы моментов сил в этом случае направлены перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы (если общее начало радиус-векторов точек приложения сил лежит в этой же плоскости). Поэтому векторное уравнение (2.70) сводится к одному скалярному: в равновесии алгебраическая сумма моментов сил равна нулю. При этом моменты сил, стремящиеся повернуть тело по часовой стрелке вокруг выбранного начала, берутся с одним знаком, против часовой стрелки — с противоположным. Если на тело действуют всего три силы, то в равновесии линии действия этих сил пересекаются в одной точке. В противном случае момент третьей силы относительно точки пересечения линий действия двух других был бы отличен от нуля.

3°. В задачах статики обычно часть действующих сил задана, а другие — *силы реакции* связей или опор — сами подлежат определению. В отсутствие трения силы реакции перпендикулярны поверхности соприкосновения тел.

## Пример

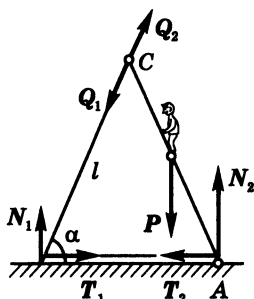


Рис. 2.19.

К нахождению сил  
реакции

К нахождению сил реакции пола  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 2.19). В отсутствие трения условие (2.72) дает

$$N_1 + N_2 = P;$$

условие равновесия моментов сил относительно точки  $A$  дает

$$N_1 \cdot 2l \cos \alpha = (Pl/2) \cos \alpha.$$

В результате получаем  $N_1 = P/4$ ,  $N_2 = 3P/4$ .

Для нахождения силы натяжения  $T$  веревки ( $T_1 = T_2 = T$ ) и силы взаимодействия  $Q$  в шарнире необходимо рассмотреть условия равновесия отдельных частей системы, например левой половины лестницы. Равенство моментов сил относительно точки  $C$  дает

$$N_1 l \cos \alpha = T l \sin \alpha,$$

откуда

$$T = N_1 \operatorname{ctg} \alpha = (P/4) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Сила  $Q_1$  направлена вниз вдоль левой половины лестницы, так как линия ее действия должна проходить через точку приложения сил  $N_1$  и  $T_1$ . Так как векторная сумма сил  $Q_1$ ,  $N_1$  и  $T_1$  равна нулю, то

$$Q = \frac{P/4}{\sin \alpha}.$$

Сила  $Q_2$ , действующая в шарнире на правую половину, по третьему закону Ньютона равна  $-Q_1$ .

Иногда в задачах статики модель абсолютно твердого тела неприменима. Например, невозможно определить силы реакции, действующие на балку, лежащую на трех опорах, если не учитывать ее деформацию (рис. 2.20).

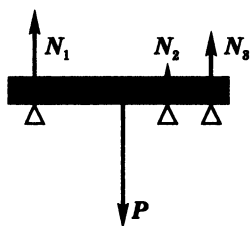


Рис. 2.20.  
Статически  
неопределимый случай

4°. Некоторые задачи статики удобно решать, используя закон сохранения энергии применительно к механизмам без трения (*золотое правило механики*) — ни один механизм не дает выигрыша в работе.

#### Пример

Груз весом  $P$  подвешен на невесомом шарнире с тремя звеньями (рис. 2.21). Определим силу натяжения нити, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

Мысленно отвязав нить в точке  $A$ , приподнимем за нее точку  $B$  на некоторую высоту. При этом груз поднимется на втрое большую высоту. Приравняв работу силы натяжения нити увеличению потенциальной энергии груза, получаем  $T = 3P$ .

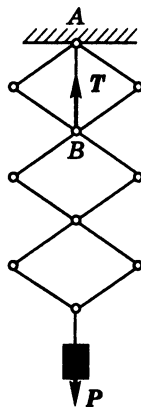


Рис. 2.21.  
Шарнирный подвес

5°. Равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным (рис. 2.22). Равновесие *устойчиво*, если при малых смещениях действующие силы стремятся вернуть тело в положение равновесия, и *неустойчиво*, если силы уведут его дальше от равновесия. При *безразличном* равновесии соседние положения также являются равновесными.

Устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии тела по отношению к ее значениям в соседних положениях, неустойчивому — максимум.

### Пример

Вертикальная свободно стоящая колонна находится в устойчивом равновесии, поскольку при малых наклонах (рис. 2.23) ее центр масс приподнимается. Так происходит до тех пор, пока вертикальная проекция центра масс не выйдет за пределы площади опоры, т. е. угол отклонения от вертикали не превысит некоторого максимального значения. Другими словами, область устойчивости простирается от минимума потенциальной энергии (при вертикальном положении) до ближайшего к нему максимума (рис. 2.23). Когда центр масс расположен точно над границей площади опоры, колонна также находится в равновесии, но неустойчивом. Горизонтально лежащей колонне соответствует гораздо более широкая область устойчивости.

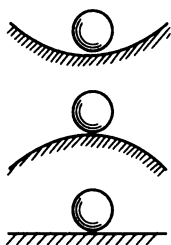


Рис. 2.22.

Устойчивое, неустойчивое  
и безразличное равновесие

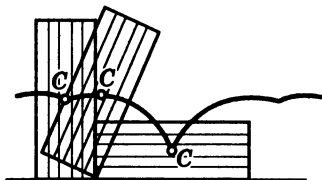


Рис. 2.23.

Положение центра масс

## 2.7. Динамика твердого тела

1°. Основу динамики твердого тела составляют *законы изменения импульса  $P$*  (п. 2.4.3°) и *момента импульса  $L$*  тела, рассматриваемого как система материальных точек:

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (2.73)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (2.74)$$

Импульс  $\mathbf{P}$  и момент импульса  $\mathbf{L}$  тела складываются из импульсов и моментов импульса отдельных материальных точек, на которые можно мысленно разбить твердое тело. Шесть независимых уравнений (2.73) и (2.74) соответствуют шести степеням свободы твердого тела (п. 2.1.6°).

Если все внешние силы  $\mathbf{F}_i$  известны, то уравнение (2.73) позволяет найти закон движения центра масс тела (п. 2.4.3°), а (2.74) — закон вращения тела вокруг центра масс.

2°. Вращение твердого тела вокруг фиксированной оси (п. 2.1.7°) характеризуется одной степенью свободы. В этом случае проекция уравнения момента импульса (2.74) на направление оси вращения не содержит неизвестных сил реакции в подшипниках, что позволяет найти угловое ускорение тела.

Проекцию момента импульса на ось вращения можно представить в виде  $I\omega$ , где  $I$  — момент инерции тела относительно оси, складывающийся из моментов инерции отдельных его элементов, равных произведению массы элемента  $\Delta m_i$  на квадрат расстояния  $r_i$  до оси:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2. \quad (2.75)$$

Момент инерции зависит не только от массы тела, но и от ее распределения. Момент инерции обруча или тонкостенной трубы относительно оси  $I = mR^2$ , так как все элементы  $\Delta m_i$  находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от оси; момент инерции сплошного однородного диска или цилиндра  $I = \frac{1}{2}mR^2$ , однородного шара  $I = \frac{2}{5}mR^2$ , однородного стержня длиной  $l$  относительно перпендикулярной стержню оси, проходящей через его середину,  $I = \frac{1}{12}ml^2$  (рис. 2.24, а). Момент инерции  $I_0$  относительно проходящей через центр масс оси связан с моментом инерции  $I$  относительно другой параллельной оси, отстоящей на расстоянии  $l$  (рис. 2.24, б), соотношением

$$I = I_0 + ml^2. \quad (2.76)$$



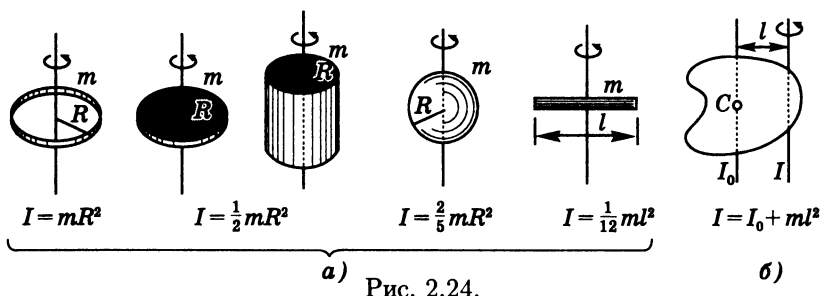


Рис. 2.24.

Моменты инерции различных тел (а) и связь моментов инерции относительно параллельных осей (б)

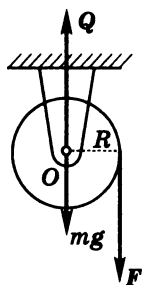


Рис. 2.25.

Силы,  
действующие  
на вращающийся  
барабан

### Пример

На массивный барабан радиуса  $R$ , который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $O$ , намотана невесомая нить (рис. 2.25). К нити приложена сила  $F$ . Момент импульса  $L$  барабана относительно оси  $O$  равен  $I\omega$ . Момент силы  $F$  относительно оси  $O$  равен  $RF$ . Проекция уравнения (2.74) на ось принимает вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = RF. \quad (2.77)$$

Угловое ускорение барабана пропорционально моменту силы  $F$  и обратно пропорционально моменту инерции  $I$ . Силу реакции  $Q$  подшипников, действующую на ось барабана, можно найти из (2.73), учитывая, что ускорение центра масс равно нулю:  $Q = mg + F$ .

**3°. Кинетическая энергия твердого тела,** вращающегося вокруг фиксированной оси, определяется соотношением

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.78)$$

При плоском движении кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетической энергии вращения вокруг оси,

проходящей через центр масс, и кинетической энергии поступательного движения со скоростью  $V$  центра масс:

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m V^2, \quad (2.79)$$

где  $I_0$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

При качении без проскальзывания обруча или тонкостенной трубы кинетическая энергия делится поровну между энергией вращения и энергией поступательного движения; а при качении сплошного однородного цилиндра — в отношении 1:2.

4°. Симметричное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии, называется *гироскопом*. Момент импульса  $L$  такого тела направлен вдоль оси вращения. В отсутствие моментов внешних сил ось гироскопа сохраняет свое направление в инерциальной системе отсчета. На этом свойстве основано действие приборов, используемых в инерциальных системах навигации. Изменение направления оси гироскопа происходит под действием моментов внешних сил. При не слишком больших моментах сил ось поворачивается медленно, и с хорошей точностью можно считать, что момент импульса  $L$  и в этом случае направлен вдоль оси. Это значит, что поведение оси гироскопа, как и поведение вектора  $L$ , описывается уравнением момента импульса (2.74).

### Пример

Ось вращающегося тяжелого волчка отклонена от вертикали (рис. 2.26). Момент силы тяжести  $r \times mg$  направлен перпендикулярно вертикальной плоскости, проходящей через ось волчка. В соответствии с уравнением момента импульса (2.74) в этом же направлении получает приращение  $\Delta L$  вектор  $L$  момента импульса волчка:

$$\Delta L = (r \times mg) \Delta t.$$

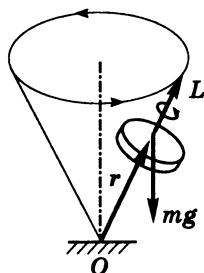


Рис. 2.26.  
Прецессия  
гироскопа

В результате вектор  $L$  (и вместе с ним ось волчка) совершает прецессию, т. е. описывает конус, как можно увидеть на рис. 2.26. Момент силы тяжести, опрокидывающий волчок, заставляет его ось поворачиваться в перпендикулярном направлении.

## 2.8. Гидростатика

1°. В *гидростатике* изучается *равновесие жидкости* и механическое воздействие покоящейся жидкости на погруженные в нее тела.

Медленное изменение формы жидкости без изменения ее объема может происходить под действием сколь угодно малой силы. В поле тяжести жидкость не обладает собственной формой, а принимает форму сосуда. Поверхность покоящейся жидкости перпендикулярна направлению силы тяжести (горизонтальна) независимо от формы сосуда. В сообщающихся сосудах однородная по плотности жидкость устанавливается на одном уровне (рис. 2.27).

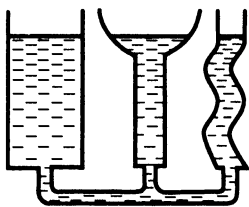


Рис. 2.27.  
Сообщающиеся сосуды

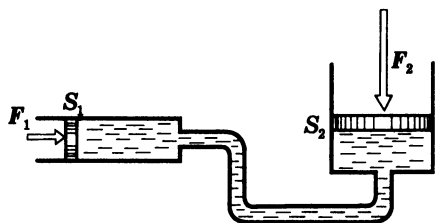


Рис. 2.28.  
Гидравлический пресс

2°. Давлением  $p$  в жидкости называется отношение модуля силы  $F$ , действующей перпендикулярно выделенной площадке, к ее площади  $S$ :

$$p = \frac{F}{S}. \quad (2.80)$$

Давление — скалярная величина. Давление не зависит от ориентации выделенной площадки. Согласно *закону Паскаля* ока-

зываемое внешними силами давление передается жидкостью одинаково по всем направлениям. На законе Паскаля основано действие многих гидравлических устройств — прессов, тормозных систем автомобиля, гидроприводов, гидроусилителей и т. п.

В гидравлическом прессе (рис. 2.28) небольшая сила  $F_1$ , приложенная к поршню малой площади, трансформируется в большую силу  $F_2$ , действующую на больший поршень:

$$F_2 = F_1 = \frac{S_2}{S_1}, \quad (2.81)$$

так как  $p = F_1/S_1 = F_2/S_2$ .

**3°.** В поле тяжести давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения благодаря действию веса самой жидкости. Для несжимаемой жидкости, где плотность  $\rho$  постоянна, таким образом получаем (рис. 2.29, а)

$$p_2 = p_1 + \rho gh. \quad (2.82)$$

Для сжимаемой жидкости или газа зависимость давления от высоты становится сложнее (п. 3.3.2°).

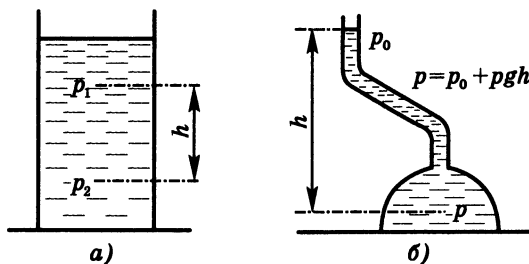


Рис. 2.29.

Давление в жидкости на разной глубине

Суммарное давление  $p$ , производимое внешними силами на поверхность жидкости ( $p_0$ ) и обусловленное весом столба жидкости ( $\rho gh$ ), называется *гидростатическим* (рис. 2.29, б):

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (2.83)$$

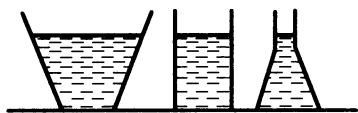


Рис. 2.30.

## Гидростатический парадокс

в сосудах сила давления меньше веса жидкости, в суживающихся — больше. Если жидкость налита до одной и той же высоты в сосуды разной формы, но с одинаковой площадью дна (рис. 2.30), то, несмотря на различный вес жидкости, сила «весового» давления на дно одинакова для всех сосудов и равна весу жидкости в цилиндрическом сосуде. Объясняется этот парадокс тем, что сила давления жидкости на наклонные стенки имеет вертикальную составляющую, которая направлена вниз в расширяющемся сосуде и вверх — в суживающемся.

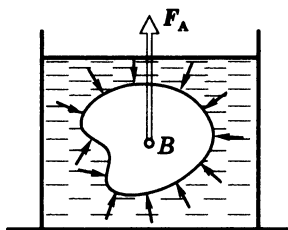


Рис. 2.31.

Выталкивающая  
(архимедова) сила

4°. *Закон Архимеда*: на любое тело, погруженное в жидкость, действует *выталкивающая сила*, направленная вертикально вверх, которая по модулю равна весу жидкости, занимающей такой же объем, как и погруженная часть тела. Точкой приложения этой силы можно считать центр масс этого однородного объема — так называемый центр водоизмещения  $B$  (рис. 2.31). В общем случае (когда тело неоднородно) эта точка может не совпадать с центром масс погруженной части самого тела. Выталкивающая сила является результатом векторного сложения сил давления жидкости на отдельные элементы поверхности данного тела, и ее возникновение обусловлено тем, что давление жидкости на поверхность тела внизу больше, чем сверху.

5°. Плотность  $\rho$  твердого тела можно найти, измеряя с помощью *гидростатических весов* вес  $P$  этого тела в воздухе

и вес  $P_1 = P - F_A$  этого же тела в жидкости с некоторой известной плотностью  $\rho_1$ :

$$\rho = \rho_1 \frac{P}{P - P_1}. \quad (2.84)$$

При взвешивании тело должно быть полностью погружено в жидкость.

Для определения таким методом плотности  $\rho_2$  жидкости необходимо взвесить тело три раза, определяя, таким образом, его вес  $P$  в воздухе, вес  $P_1$  в жидкости с некоторой известной плотностью  $\rho_1$  и вес  $P_2$  в жидкости, плотность которой подлежит определению:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P - P_2}{P - P_1}. \quad (2.85)$$

Для измерений можно воспользоваться любым твердым телом, которое тонет (но не растворяется) в каждой из рассматриваемых жидкостей. Знать объем и плотность данного тела для проведения этих измерений не требуется.

Плотности некоторых твердых тел и жидкостей приведены в табл. 2.1.

**6°.** Если при полном погружении тела выталкивающая сила превышает вес ( $F_A > P$ ), тело поднимается на поверхность и *плавает*, лишь частично погрузившись в жидкость. В равновесии ( $F_A = P$ ) точка приложения выталкивающей силы и центр масс плавающего тела лежат на одной вертикали, так как при этом должны уравниваться и моменты действующих сил.

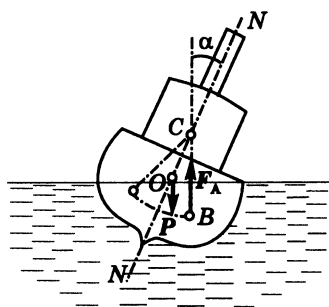


Рис. 2.32.  
Метацентр  $C$

*Устойчивость* (остойчивость) плавания определяется положением метацентра относительно центра масс корабля (рис. 2.32). *Метацентр* — это точка пересечения плоскости

Таблица 2.1

Плотность некоторых веществ (в  $10^3 \text{ кг/м}^3$ )

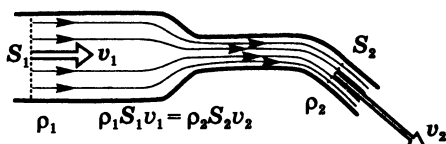
<i>Твердые вещества</i>			
Алюминий	2,70	Платина	21,45
Бериллий	1,84	Ртуть ( $-39^\circ\text{C}$ )	14,19
Ванадий	5,6	Свинец	11,34
Висмут	9,78	Серебро	10,5
Вольфрам	19,3	Титан	4,5
Галлий	5,93	Хром	6,92
Германий	7,7–7,88	Цинк	7,1
Железо	19,3	Бронза	8,7–8,9
Золото	22,42	Инвар	8,0
Иридий	0,86	Латунь	8,4–8,7
Калий	2,35	Сталь	7,8
Кремний	0,534	Асбест	2,0–2,8
Литий	1,74	Древесина	0,5–0,9
Магний	8,89	Лед ( $0^\circ\text{C}$ )	0,917
Медь	0,97	Парафин	0,9
Натрий	8,8	Пробка	0,22–0,26
Никель	7,3	Стекло	2,4–2,8
Олово		Эбонит	1,15
<i>Жидкие вещества</i>			
Ацетон	0,792	Глицерин	1,26
Бензин	0,899	Керосин	0,8
Вода ( $4^\circ\text{C}$ )	1,000	Спирт этиловый	0,791
( $20^\circ\text{C}$ )	0,998	Эфир	0,736
морская	1,025	Ртуть ( $20^\circ\text{C}$ )	13,55

симметрии корабля с вертикалью, проходящей через точку приложения выталкивающей силы, действующей при боковом крене корабля. Если метацентр  $C$  лежит выше центра масс корабля, то корабль плавает устойчиво, ибо возникающие при крене моменты сил стремятся вернуть его в вертикальное положение.

## 2.9. Гидродинамика

1°. Для характеристики движущейся жидкости (или газа) используются *линии тока*, т. е. линии, касательные к которым в любой точке дают направление скорости частиц жидкости. В случае *стационарного* движения линии тока сохраняют свою конфигурацию с течением времени и совпадают с траекториями частиц жидкости.

Рис. 2.33.  
Уравнение  
неразрывности



При стационарном течении по трубе через любое сечение за равные промежутки времени протекают одинаковые *массы* жидкости. Поэтому плотность  $\rho$  жидкости, скорость  $v$  ее течения и площадь  $S$  поперечного сечения трубы связаны *уравнением неразрывности* (рис. 2.33):

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (2.86)$$

В случае *несжимаемой жидкости* ( $\rho = \text{const}$ ) через любое сечение протекают одинаковые объемы жидкости, поэтому

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (2.87)$$

т. е. в сечении меньшей площади жидкость течет быстрее, и наоборот.

2°. В условиях, когда силы вязкого трения почти не влияют на движение жидкости, используется модель *идеальной жидкости*. В противном случае говорят о *вязкой жидкости*. При движении идеальной жидкости не происходит диссипации механической энергии. Математическим выражением закона сохранения энергии служит *уравнение Бернулли*

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (2.88)$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — давление, которое показывал бы в соответствующих точках манометр, движущийся вместе с жидкостью,  $h_1$  и  $h_2$  — высота этих точек, отсчитанная от какого-либо общего уровня,  $v_1$  и  $v_2$  — скорость жидкости в этих точках.



### Примеры

1) Для нахождения скорости истечения из очень узкого отверстия иглы шприца (рис. 2.34) в уравнении Бернулли (2.88) следует положить  $h_1 = h_2$  и считать скорость  $v_1$  жидкости у поршня равной нулю:

$$v_2 = \sqrt{2F/(\rho S)}. \quad (2.89)$$

Если площадью отверстия  $S$  нельзя пренебрегать по сравнению с площадью поршня  $S_1$ , т. е. условие  $S_2/S_1 \ll 1$  не выполняется, то скорость истечения определяется соотношением

$$v_2^2 = \frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}. \quad (2.90)$$

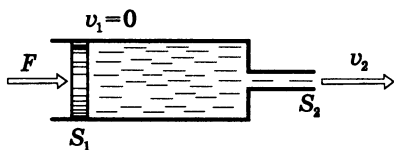


Рис. 2.34.  
Шприц

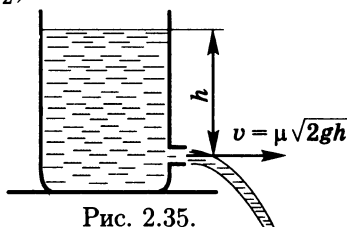


Рис. 2.35.  
Формула Торричелли

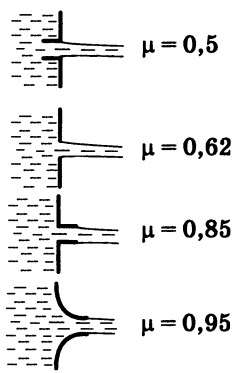


Рис. 2.36.  
Коэффициент  
истечения

2) Для скорости жидкости, вытекающей из отверстия широкого открытого сосуда (рис. 2.35), уравнение Бернулли (2.88) приводит к *формуле Торричелли*

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (2.91)$$

где  $h$  — высота уровня жидкости над отверстием. Скорость вытекающей жидкости не зависит от ее плотности и совпадает со скоростью свободного падения с высоты  $h$ . В действительности при необтекаемой форме краев отверстия скорости частиц жидкости в отверстии не параллельны друг другу, а имеют составляющую,

направленную к оси потока: струя жидкости сужается. Поэтому эффективная скорость истечения всегда меньше и может быть записана в виде

$$v = \mu\sqrt{2gh}, \quad (2.92)$$

где  $\mu$  — коэффициент истечения, зависящий от формы отверстия (рис. 2.36).

В движущейся жидкости давление на неподвижную площадку зависит от ее ориентации в потоке. Связь измеряемого давления со скоростью в каждом случае определяется уравнением Бернулли. Если отверстие манометра расположено на боковой поверхности трубки (рис. 2.37, а), то его показание  $p$  будет таким же, как и у манометра, движущегося вместе с жидкостью. Если трубка манометра с открытым передним концом обращена навстречу потоку жидкости (*трубка Пито*, см. рис. 2.37, б), то показание манометра будет соответственно

$$p_{\text{изм.}} = p + \rho v^2 / 2.$$

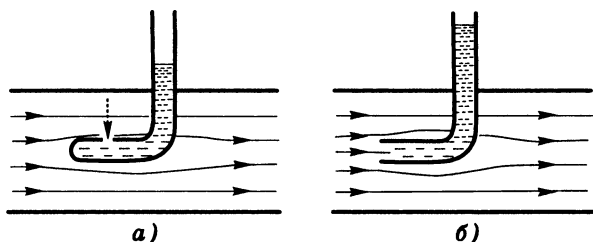


Рис. 2.37.

Манометрические трубки в потоке

Комбинация таких трубок называется *трубкой Прандтля* (рис. 2.38, а). Показываемая ею разность давлений  $\Delta p$  связана со скоростью потока соотношением

$$\Delta p = \rho v^2 / 2.$$

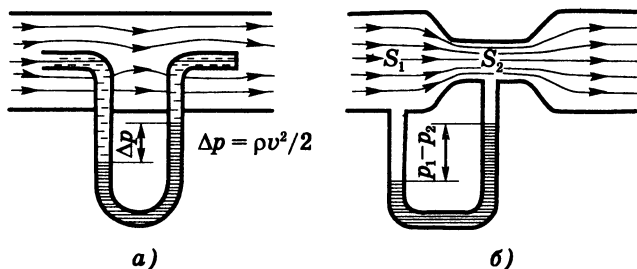


Рис. 2.38.

Трубки Прандтля (а) и Вентури (б)

Трубка Вентури (рис. 2.38, б) измеряет разность давлений в разных сечениях трубы, которая связана со скоростью в одном из сечений соотношением

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.93)$$

3°. Движение вязкой жидкости, при котором отдельные слои скользят друг относительно друга, не перемешиваясь, называется *ламинарным* (или слоистым). Движение, сопровождающееся перемешиванием слоев и образованием вихрей, называется *турбулентным*.

Ламинарным будет, например, движение жидкости, находящейся между двумя пластинами, одна из которых движется параллельно другой с небольшой относительной скоростью  $v$  (рис. 2.39). Для поддержания равномерного движения пластины необходима сила  $F$ , пропорциональная ее площади  $S$ , скорости  $v$  и обратно пропорциональная расстоянию  $d$  между пластинами:

$$F = \eta \frac{Sv}{d}. \quad (2.94)$$

Коэффициент  $\eta$  называется *вязкостью* жидкости (или коэффициентом вязкого трения). Вязкость жидкости сильно зависит от температуры. Например, вязкость воды при повышении температуры от 0 до 20 °С уменьшается почти вдвое.

При ламинарном течении жидкости по трубе круглого сечения профиль скоростей — параболический (рис. 2.40, а).

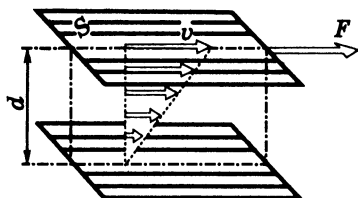


Рис. 2.39.

Вязкое (внутреннее) трение

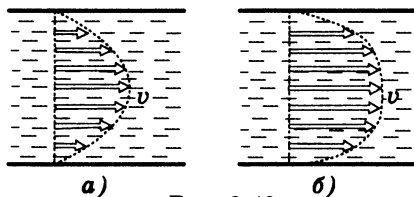


Рис. 2.40.

Профиль скоростей при ламинарном (а) и турбулентном (б) течении по трубе

В этом случае объем  $V$  жидкости, протекающей по трубе за время  $t$ , дается формулой Пуазейля

$$V = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 \eta l} t, \quad (2.95)$$

где  $\Delta p$  — разность давлений на концах трубы,  $R$  — радиус трубы,  $l$  — ее длина (п. 1.3.4°).

В трубе постоянного сечения давление уменьшается вдоль трубы по линейному закону (рис. 2.41).

Сила, действующая на шар в ламинарном потоке вязкой жидкости, или, что то же самое, сила сопротивления при движении шара с такой же скоростью и в неподвижной вязкой жидкости, дается *формулой Стокса*

$$F = 6\pi\eta Rv, \quad (2.96)$$

где  $R$  — радиус шара.

4°. Когда скорость течения превысит определенное критическое значение, ламинарное движение становится неустойчивым, и жидкость или газ начинают двигаться *турбулентно*. При стационарном турбулентном движении скорость жидкости в данном месте совершает хаотические колебания по модулю и направлению. Но средняя скорость в данном месте трубы (рис. 2.40, б) будет постоянна по модулю и направлена вдоль оси трубы. Профиль средней скорости в трубе отличается от параболического профиля ламинарного течения (рис. 2.40, а) более быстрым возрастанием скорости у стенок (в так называемом *пограничном слое*) и меньшей кривизной в осевой части. Ламинарный режим характерен для движения вязкой жидкости с малыми скоростями в узких трубах (например, в капиллярах). Турбулентный режим характерен для движения жидкости с малой вязкостью, происходящего с большой скоростью в трубах с большими диаметрами.

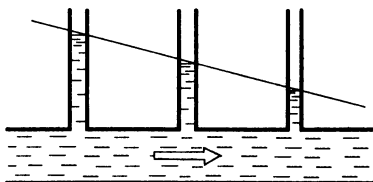


Рис. 2.41.

Падение давления при течении вязкой жидкости по трубе

При больших скоростях  $v$  сила сопротивления движению твердого тела определяется не вязкостью жидкости  $\eta$ , а ее плотностью  $\rho$ . В этом случае сила сопротивления называется *гидравлической* и выражается формулой

$$F = CS\rho v^2, \quad (2.97)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения тела, а коэффициент  $C$  зависит от его формы. Например, для тонкого диска, перпендикулярного потоку,  $C \approx 0,55$ ; для шара  $C$  лежит в интервале 0,05–0,2 в зависимости от характера поверхности (шероховатая или гладкая); для легкового автомобиля  $C \approx 0,2$ .

Поведение движущейся жидкости зависит от относительной роли динамического сопротивления и вязкого трения. Эта роль характеризуется безразмерным *числом Рейнольдса*

$$\text{Re} = \frac{l^2 \rho v^2}{\eta l v} = \frac{l \rho v}{\eta}, \quad (2.98)$$

где  $l$  — характерный линейный размер. При обтекании тел  $l$  — это длина или поперечный размер, при течении в длинных трубах  $l$  — это диаметр трубы.

**Закон подобия:** коэффициенты  $C$  в формуле (2.97) для геометрически подобных тел одинаковы, если равны соответствующие числа Рейнольдса. В этом случае будет одинаковым характер обтекания при разных плотностях, вязкостях, скоростях движения и размерах тел. Закон подобия позволяет проводить экспериментальные исследования, используя уменьшенные модели обтекаемых тел.

При малых скоростях, пока число Рейнольдса существенно меньше некоторого критического значения, течение любой жидкости или газа будет ламинарным. При достижении критического значения числа Рейнольдса ламинарное течение сменяется турбулентным. Критические значения числа Рейнольдса для потока в цилиндрических трубах существенно зависят от состояния поверхности труб и условий втекания и могут лежать в интервале 1200–10 000.

### 3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Исторически сложились два различных подхода к изучению свойств макроскопических систем (систем, состоящих из большого числа частиц) — статистический и термодинамический. Задачей *статистического* подхода — статистической механики — является установление законов поведения макроскопических систем на основе известных динамических законов поведения отдельных частиц системы — атомов или молекул. Статистическая механика устанавливает связь между экспериментально измеряемыми *макроскопическими параметрами*, характеризующими систему в целом (например, давление, объем, температура, напряженность электрического поля), и *микроскопическими параметрами* системы (массы и заряды составляющих систему частиц, их координаты и импульсы и т. д.).

*Термодинамический* подход, в отличие от статистического, опирается не на модельные представления об атомно-молекулярной структуре вещества, а на твердо установленные на опыте общие законы, не зависящие от конкретной структуры системы, такие, как закон сохранения энергии. Основные понятия термодинамики вводятся на основе эксперимента, и поэтому она оперирует только макроскопическими параметрами.

Наиболее полные представления о свойствах макроскопических систем дает совместное использование термодинамики и статистической механики. Например, для одного моля идеального газа статистическая механика устанавливает такую связь между произведением двух макроскопических параметров — давления  $p$  и молярного объема  $V_\mu$  — и средним значением микроскопического параметра  $\langle \epsilon \rangle$  — средней кинетической энергией хаотического поступательного движения одной молекулы  $\epsilon$  (п. 3.2.4°):

$$pV_\mu = \frac{2}{3} \langle \epsilon \rangle N_A, \quad (3.1)$$

где  $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}$  — постоянная Авогадро (п. 3.2.3°).

Для одного моля газа установлена связь между тремя макроскопическими параметрами газа —  $p$ ,  $V_\mu$  и термодинамической температурой  $T$ :

$$pV_\mu = RT, \quad (3.2)$$

где  $R = 8,314510$  Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная (п. 3.1.3°). Сравнение выражений (3.1) и (3.2) позволяет установить физический смысл термодинамической температуры, т. е. связать ее со средней кинетической энергией движения молекул:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (3.3)$$

где  $k = R/N_A = 1,380658 \cdot 10^{-23}$  — постоянная Больцмана.

### 3.1. Основы термодинамики

1°. *Феноменологическая термодинамика* — теория тепловых явлений, основанная на установленных экспериментально основных законах («началах» термодинамики). В термодинамике не рассматривается внутренняя атомно-молекулярная структура изучаемых систем. *Термодинамическая система* — любое макроскопическое тело или совокупность тел. Система называется *замкнутой* (или *изолированной*), если она не взаимодействует с внешними телами (окружающей средой). Состояние термодинамической системы задается несколькими *макроскопическими параметрами*. Число необходимых параметров зависит от системы и определяется на опыте. Величины, не зависящие от предыстории системы и определяемые ее состоянием в данный момент, называются *функциями состояния*.

Состояние замкнутой системы называется *равновесным*, если значения макроскопических параметров системы не меняются со временем (флуктуации не учитываются, см. п. 3.3.6°). В *стационарном* состоянии открытой системы макроскопические параметры также не меняются со временем, однако это обусловлено протеканием внешних по отношению к рассматриваемой системе процессов. Например, *стационарным* (но не равновесным) будет состояние с некоторым распределе-

нием температуры вдоль стержня, концы которого поддерживаются при двух различных температурах.

*Нулевой закон* (или общее начало) *термодинамики*: замкнутая термодинамическая система с течением времени приходит в равновесное состояние, в котором температура всех макроскопических частей системы одинакова. Время прихода системы в равновесие называется *временем релаксации* (п. 1.3.7°).

**2°.** *Термодинамическое* (тепловое) *равновесие* обладает свойством транзитивности: если система  $A$  находится в термодинамическом равновесии с системой  $B$ , а система  $B$  — с системой  $C$ , то системы  $A$  и  $C$  также находятся в термодинамическом равновесии. На этом свойстве основано введение понятия *температуры*, позволяющей описывать термодинамическое равновесие между телами, находящимися в тепловом контакте: в состоянии равновесия тела имеют одинаковую температуру. Введение понятия термодинамической (абсолютной) температуры, не зависящей от термометрического вещества, осуществляется с помощью *второго закона термодинамики* (п. 3.1.13°). Такой принцип построения температурной шкалы был впервые предложен Томсоном (Кельвином), и поэтому термодинамическую шкалу называют также шкалой Кельвина.

Эмпирическая температурная шкала строится на основе явления теплового расширения какого-либо вещества (ртути, спирта и т. д., см. п. 3.6.3°). Шкала Цельсия устанавливается путем деления температурного интервала между точкой плавления льда, принимаемой за  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , и точкой кипения воды при нормальном атмосферном давлении на сто равных частей — градусов. Показания двух термометров с различными термометрическими веществами совпадают, вообще говоря, только при  $0$  и  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

*Давление  $p$*  (скалярная величина) в термодинамике выступает как экспериментально измеряемый параметр, определяемый средней силой, действующей на единицу площади поверхности по нормали к ней.



Макроскопические параметры системы делятся на *внешние* (задаваемые условиями эксперимента) и *внутренние* (определяемые свойствами системы при заданных внешних параметрах). Например, объем газа, заключенного в сосуд фиксированной вместимости, является внешним параметром. Устанавливающееся в газе давление в этом случае является внутренним параметром. Если же газ помещен в сосуд, закрытый подвижным поршнем, то внешним параметром будет давление, а внутренним — объем газа.

Внутренние параметры системы разделяют на экстенсивные и интенсивные. Параметры, пропорциональные числу частиц в системе, называются *экстенсивными* или аддитивными (энергия всей системы, ее магнитный момент и др.). Параметры, определяемые числом частиц в единице объема (т. е. не зависящие от полного числа частиц в системе), называются *интенсивными* (давление, температура и др.). Экстенсивные параметры характеризуют систему в целом, а интенсивные — каждую ее макроскопическую часть.

В состоянии термодинамического равновесия внутренние параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры. При этом говорят, что существует *уравнение состояния*. Уравнение состояния либо берется из опыта, либо выводится теоретически в рамках статистического подхода.

**3°. Пример уравнения состояния, определяемого из опыта, дает уравнение Клапейрона — Менделеева, справедливое в некоторых интервалах значений параметров какого-либо газа. Для одного моля газа (п. 3.2.3°) оно имеет вид**

$$pV_\mu = RT. \quad (3.4)$$

Вследствие аддитивности объема  $V = V_\mu m/M$ , и для произвольного количества газа (числа молей)  $\nu = m/M$  из (3.4) следует

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \text{или} \quad pV = \nu RT. \quad (3.5)$$

Здесь  $m$  — масса газа,  $M$  — молярная масса газа (п. 3.2.3°),  $R = 8,314510$  Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

Уравнение Клапейрона — Менделеева содержит в себе все найденные на опыте *газовые законы*.

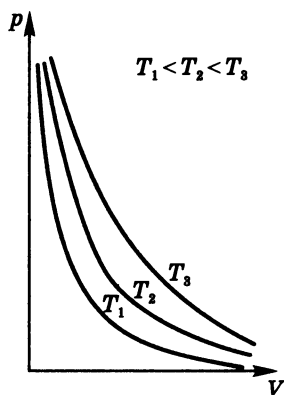


Рис. 3.1.

Изотермы идеального газа

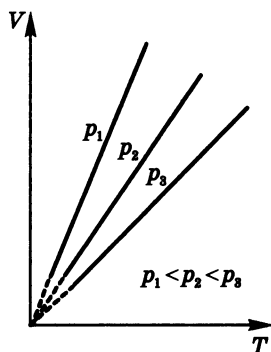


Рис. 3.2.

Изобары идеального газа

**Закон Бойля — Мариотта:** для данной массы определенного газа, при неизменной температуре произведение давления газа  $p$  на его объем  $V$  постоянно, т. е.

$$pV = \text{const} \quad (T, m, M - \text{const}). \quad (3.6)$$

Графики закона Бойля — Мариотта на  $p$ — $V$ -диаграмме — изотермы (рис. 3.1). Они представляют собой гиперболы (п. М9.3.3°).

**Закон Гей-Люссака:** объем  $V$  данной массы определенного газа при постоянном давлении пропорционален термодинамической температуре  $T$ , т. е.

$$V = V' \frac{T}{T'} \quad (p, m, M - \text{const}), \quad (3.7)$$

где  $V'$  — объем газа при некоторой температуре  $T'$ . Графики закона Гей-Люссака на  $V$ — $T$ -диаграмме — изобары (рис. 3.2).

**Закон Шарля:** давление  $p$  данной массы определенного газа при постоянном объеме пропорционально термодинамической температуре  $T$ , т. е.

$$p = p' \frac{T}{T'} \quad (V, m, M = \text{const}), \quad (3.8)$$

где  $p'$  — давление газа при некоторой температуре  $T'$ . Графики закона Шарля на  $p$ — $T$ -диаграмме — изохоры (рис. 3.3).

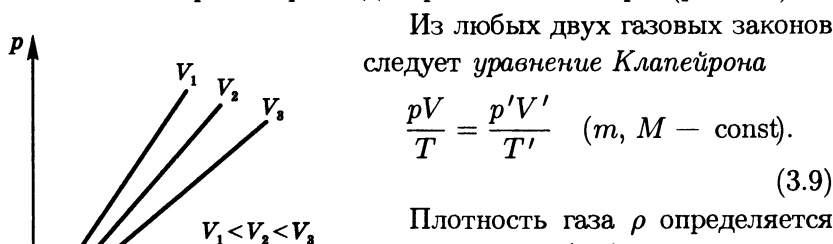


Рис. 3.3.

Изохоры идеального газа

Из любых двух газовых законов следует уравнение Клапейрона

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad (m, M = \text{const}). \quad (3.9)$$

Плотность газа  $\rho$  определяется следующим из (3.5) соотношением

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{pM}{RT}. \quad (3.10)$$

Газовые законы установлены экспериментально и довольно хорошо выполняются для реальных газов в определенных интервалах изменения параметров. Они являются точными законами для идеального газа (п. 3.2.4°).

4°. При использовании температурной шкалы Цельсия законы Гей-Люссака и Шарля записываются в виде

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad p = p_0(1 + \alpha t). \quad (3.11)$$

Здесь  $V_0$  и  $p_0$  — объем и давление газа при температуре  $0^\circ\text{C}$ , а  $\alpha$  — температурный коэффициент объемного расширения (температурный коэффициент давления) газов, который одинаков для всех газов:

$$\alpha = (1/273,15) \text{ K}^{-1}.$$

Газ как термометрическое вещество удобен для построения температурной шкалы (*газовый термометр*), так как различные газы расширяются при нагревании практически одинаково

и в малой степени сказывается тепловое расширение материала, в который помещается термометрическое вещество. Международная практическая шкала температуры вводится таким образом, чтобы вместо линейной зависимости от температуры (3.11) в законах Гей-Люссака и Шарля фигурировала пропорциональность температуре (см. (3.7), (3.8)). Эта шкала совпадает со шкалой Кельвина (п. 3.1.2°). При этом минимальное возможное значение температуры по шкале Цельсия оказывается равным  $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Газовый термометр обеспечивает наиболее точные измерения термодинамической температуры в широком интервале температур. Связь температуры  $T$  по шкале Кельвина и температуры  $t$  по шкале Цельсия выражается формулой

$$\frac{T}{\text{K}} = \frac{t}{^{\circ}\text{C}} + 273,15. \quad (3.12)$$

Термодинамическая температура  $T$  входит практически во все соотношения термодинамики (п. 3.1.13°).

5°. Термодинамические системы делятся на гомогенные и гетерогенные. *Гомогенными* называются системы, свойства которых не меняются или меняются непрерывно при переходе от одного места к другому. *Гетерогенными* называются системы, которые состоят из нескольких гомогенных подсистем, так что внутри системы имеются разрывы непрерывности в изменении некоторых их свойств (резкие границы раздела).

Гомогенная часть гетерогенной системы, отделенная от других частей поверхностью раздела, на которой скачком изменяются какие-либо свойства и соответствующие им параметры, называется *фазой*. *Компоненты* — это химически индивидуальные вещества, которые могут быть выделены из системы. Например, смесь разных газов является однофазной, но многокомпонентной системой. Смесь воды и льда является двухфазной, но однокомпонентной системой. Система с двумя компонентами называется *бинарной* или *двойной*, с тремя компонентами — *тернарной* или *тройной*.

**6°. Термодинамический процесс** — это переход системы из одного состояния в другое (п. 3.1.1°). При достаточно медленном изменении внешних условий, когда скорость протекающего в системе процесса значительно меньше скорости релаксации, процесс фактически представляет собой цепочку близких друг к другу равновесных состояний. Такой процесс описывается теми же макроскопическими параметрами, что и состояние равновесия. Эти медленные процессы называются *равновесными* (или *квазистатическими*). Их также называют *обратимыми*, поскольку цепочку равновесных состояний можно проходить как в прямой, так и в обратной последовательности. Реальные процессы являются *необратимыми* и могут считаться равновесными только с большей или меньшей точностью.

Примеры необратимых процессов: процесс теплопередачи при конечной разности температур тел, расширение газа в вакуум, процесс диффузии (п. 3.2.1°). При этих процессах система так далека от состояния равновесия, что ее нельзя характеризовать определенными значениями температуры, давления, концентрации частиц.

Особое место в термодинамике занимают круговые процессы или циклы. *Циклом* называется процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние. Циклы лежат в основе работы тепловых машин.

**7°. Основная характеристика термодинамической системы** — ее *энергия*. Энергия не возникает и не исчезает: в явлениях природы она только переходит из одной формы в другую или от одной физической системы к другой. В этом заключается *закон сохранения энергии* — наиболее фундаментальный закон природы.

Полная энергия  $E_{\text{полн.}}$  системы состоит из механической энергии  $E$  и внутренней энергии  $U$  (п. 3.2.4°). В термодинамике обычно рассматривают покоящиеся тела, механическая энергия которых не меняется. Изменить внутреннюю энергию выделенной физической системы можно тремя различными способами — совершая *работу* внешними силами, передавая ей

некоторую *теплоту* и путем *обмена веществом* с окружающей средой.

Макроскопическая работа внешних сил и теплота — это не формы энергии, а способы изменения энергии и передачи ее от одной системы к другой. Работа и теплота не являются функциями состояния системы (п. 3.1.1°). Энергия характеризует состояние системы (и является функцией состояния). Теплота и работа характеризуют изменение состояния, т. е. происходящие в системе процессы.

*Первый закон термодинамики:* изменение внутренней энергии системы  $\Delta U$  при каком-либо переходе из состояния 1 в состояние 2 равно сумме совершенной над системой работы  $A$  внешних сил и переданного ей количества теплоты  $Q$ :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = A + Q. \quad (3.13)$$

(При этом предполагается, что не происходит изменения механической энергии и числа частиц в системе, т. е. обмена веществом с окружающей средой.) Величины  $A$  и  $Q$  являются алгебраическими (т. е. могут быть положительными и отрицательными), причем  $Q > 0$  соответствует подводу теплоты к системе, а  $Q < 0$  — отводу теплоты от системы. Иногда первый закон термодинамики записывается в виде

$$Q = \Delta U + A', \quad (3.14)$$

где  $A'$  — работа, совершаемая самой системой, т. е. силами, действующими со стороны системы на внешние тела:  $A' = -A$ .

Первый закон термодинамики устанавливает эквивалентность различных видов энергии: энергия переходит из одного вида в другой в строго эквивалентных количествах.

8°. Работа  $\Delta A'$ , совершаемая какой-либо системой, характеризующейся давлением  $p$ , при изменении ее объема на  $\Delta V$ , равна

$$\Delta A' = p\Delta V. \quad (3.15)$$

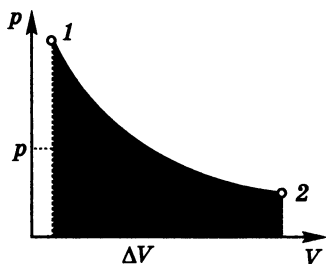


Рис. 3.4.

Работа на  $p$ — $V$ -диаграмме

Работа численно равна площади заштрихованной полоски высотой  $p$  и шириной  $\Delta V$  на  $p$ — $V$ -диаграмме (рис. 3.4). Работа, совершаемая системой при расширении из состояния 1 в состояние 2 по пути 1 — 2, численно равна площади всей криволинейной трапеции на рис. 3.4.

*Теплоемкость* — отношение переданного системе количества теплоты  $Q$  к происходящему при этом изменению температуры  $\Delta T$ . Теплоемкость характеризует процесс, происходящий с физической системой. Например, теплоемкость одного моля идеального одноатомного газа при постоянном объеме системы (см. (3.35) для  $U$ )

$$C_V = \frac{3}{2}R. \quad (3.16)$$

Для двухатомного газа при постоянном объеме системы

$$C_V = \frac{5}{2}R. \quad (3.17)$$

При постоянном давлении в системе

$$C_p = C_V + R. \quad (3.18)$$

В случае, когда давление в газе пропорционально его объему ( $p = kV$ ),

$$C = C_V + \frac{R}{2}. \quad (3.19)$$

Теплоемкости твердых тел и жидкостей, в отличие от газов, слабо зависят от внешних условий (п. 3.7.1°), т. е.  $C_p \approx C_V$ .

**9°. Изохорический** (изохорный) процесс:  $V = \text{const}$ . Совершаемая газом работа

$$A' = 0,$$

так как  $\Delta V = 0$ . Для произвольного количества газа  $\nu$  теплота

$$Q = \nu C_V (T_2 - T_1).$$

Вследствие первого закона термодинамики (3.14) при изохорическом процессе

$$Q = \Delta U.$$

*Изобарический* (изобарный) процесс:  $p = \text{const}$ . Совершаемая газом работа

$$A' = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1),$$

$$Q = \nu C_p(T_2 - T_1).$$

*Изотермический процесс*:  $T = \text{const}$ . Совершаемая газом работа (п. М5.6.2°)

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Для идеального газа при изотермическом процессе  $\Delta U = 0$ , поэтому в силу первого закона термодинамики

$$A' = Q.$$

*Адиабатический* (адиабатный) процесс:  $Q = 0$ ,  $C = 0$ . Вследствие первого закона термодинамики

$$A' = -\Delta U.$$

Для идеального газа при адиабатическом процессе давление и объем связаны уравнением Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (3.20)$$

где  $\gamma = C_p/C_V$ . На  $p$ — $V$ -диаграмме график адиабатического процесса идет круче графика изотермического процесса (рис. 3.5).

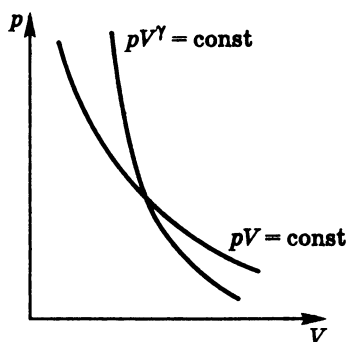


Рис. 3.5.

Графики адиабатического и изотермического процессов

**10°.** Принципиальная схема *тепловой машины* показана на рис. 3.6. От нагревателя (теплового резервуара с температурой  $T_1$ ) берется некоторое количество теплоты ( $Q_1$ ) и частично преобразуется рабочим телом в работу ( $A$ ), а частично



( $Q_2$ ) передается холодильнику (тепловому резервуару с температурой  $T_2 < T_1$ ). Коэффициентом полезного действия (КПД) тепловой машины называется отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (3.21)$$

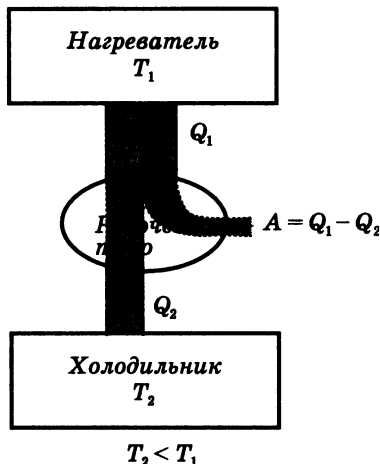


Рис. 3.6.

Тепловая машина

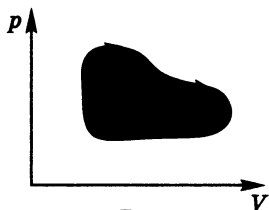


Рис. 3.7.

Работа в циклическом процессе

Работа в циклическом процессе

Работа всех тепловых машин основана на использовании циклов (п. 3.1.6°). Совершаемая тепловой машиной за один цикл работа определяется площадью, ограниченной на  $p$ — $V$ -диаграмме графиками идущих процессов (рис. 3.7). В цикле, происходящем по часовой стрелке, механическая работа совершается за счет внутренней энергии, о чем коротко говорят: теплота переходит в механическую работу. В процессе, происходящем против часовой стрелки, механическая энергия превращается во внутреннюю энергию.

### 11°. Второй закон термодинамики устанавливает каче-

ственную неравноценность различных видов энергии в смысле способности к превращению в другие виды. Существует несколько эквивалентных формулировок этого закона.

1) *Формулировка Клаузиуса*: невозможен процесс, единственным результатом которого был бы переход теплоты от тела с более низкой температурой к телу с более высокой температурой.

2) *Формулировка Томсона (Кельвина)*: невозможно построить периодически действующую тепловую машину, которая со-

вершала бы работу за счет получения теплоты от нагревателя и ничего не отдавала бы холодильнику.

3) *Формулировка Шиллера — Каратеодори*: вблизи каждого равновесного состояния термодинамической системы есть другое равновесное состояние, недостижимое из первого адиабатическим путем.

4) *Теорема Карно*: для тепловой машины, совершающей цикл между нагревателем с температурой  $T_1$  и холодильником с температурой  $T_2$ , КПД не может превышать значения

$$\eta_{\max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (3.22)$$

Максимальное значение  $\eta_{\max}$ , определяемое (3.22), достигается у тепловой машины, совершающей обратимый цикл, независимо от типа рабочего тела. Цикл называется *обратимым*, если он состоит из обратимых процессов, т. е. таких, которые можно провести в любом направлении через одну и ту же цепочку равновесных состояний.

*Цикл Карно* — единственный обратимый цикл, который можно осуществить между нагревателем и холодильником с фиксированными температурами; он состоит из двух изотерм и двух адиабат. Для идеального газа такой цикл показан на рис. 3.8. На участке  $1 - 2$  происходит изотермическое расширение идеального газа при температуре нагревателя  $T_1$ .

На участке  $2 - 3$  газ расширяется адиабатически, его температура понижается до значения, равного температуре холодильника  $T_2$ . На участке  $3 - 4$  газ изотермически сжимается при температуре холодильника. На участке  $4 - 1$  газ сжимается адиабатически, пока его температура не повысится до значения  $T_1$ .

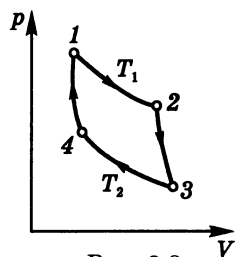


Рис. 3.8.  
Цикл Карно

12°. Цикл, происходящий против часовой стрелки, лежит в основе *холодильной машины* — устройства, отводящего теп-

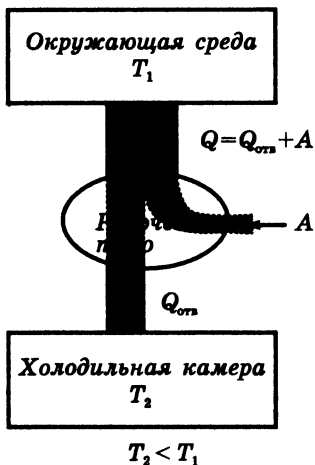


Рис. 3.9.

Холодильная машина

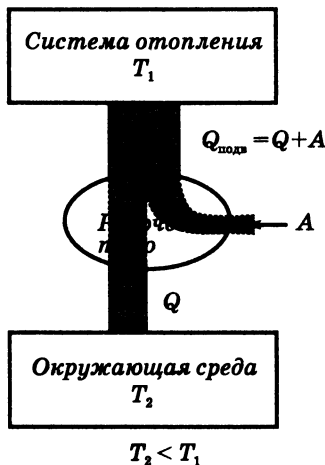


Рис. 3.10.

Тепловой насос

лоту из холодильной камеры (рис. 3.9). Характеристикой, аналогичной КПД, здесь является эффективность (*холодильный коэффициент*)

$$\varepsilon = \left| \frac{Q_{\text{отв.}}}{A} \right|. \quad (3.23)$$

Если цикл является обратимым, то

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (3.24)$$

В отличие от холодильной машины *тепловой насос* должен отдавать как можно больше теплоты горячему телу, например системе отопления (рис. 3.10). Коэффициент преобразования (*отопительный коэффициент*) теплового насоса определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{подв.}}}{A}. \quad (3.25)$$

При обратимом цикле

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1. \quad (3.26)$$

**13°.** Количественная формулировка второго закона термодинамики для обратимого и необратимого циклов с помощью (3.21) и (3.22) может быть представлена в виде

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Это соотношение можно переписать так:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (3.27)$$

Знак равенства достигается для обратимых процессов. Здесь  $Q_1$  — теплота, взятая от нагревателя с температурой  $T_1$ ,  $Q_2$  — теплота, отданная холодильнику с температурой  $T_2$ .

Равенство (3.27) не зависит от того, какое вещество совершает обратимый цикл Карно. Поэтому соотношение (3.27) можно использовать для определения *термодинамической температуры*, не зависящей от свойств конкретных тел (п. 3.1.2°). Чтобы однозначно определить *термодинамическую температурную шкалу*, необходимо задать значение температуры в некоторой опорной точке. В качестве такой точки выбирается тройная точка воды (п. 3.4.5°).

**14°.** Из второго начала термодинамики следует, что существует определенная функция состояния термодинамической системы  $S$ , значение которой не меняется при равновесных адиабатических процессах. Дифференциал такой функции при обратном процессе дается выражением

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (3.28)$$

где  $\delta Q$  — элементарное количество теплоты, получаемое системой при температуре  $T$  в результате обратимого процесса. Функция  $S$  называется *энтропией*. В замкнутой системе процессы идут таким образом, что

$$\Delta S \geq 0.$$

Знак равенства относится к обратимым процессам.

### Пример

Идеальный газ находится в одной половине теплоизолированного сосуда, разделенного перегородкой на две равные части. Определим изменение энтропии газа, если перегородка внезапно разрушится и газ заполнит весь сосуд.

Поскольку газ не получает теплоты (сосуд теплоизолирован) и не совершает работы (он расширяется в вакуум), его внутренняя энергия останется неизменной. Внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре и не зависит от объема, поэтому температура газа в результате описанного процесса не изменяется. Происходящий с газом процесс необратим. Однако энтропия конечного состояния газа, являясь функцией состояния, не зависит от того, каким путем попал газ в это конечное состояние. Поэтому можно рассмотреть обратимый изотермический процесс, при котором газ расширяется, перемещая перегородку, пока не займет весь объем сосуда.

Количество теплоты  $Q$ , получаемое идеальным газом при изотермическом процессе, равно совершаемой газом работе  $A'$  (п. 3.1.9°):

$$Q = A' = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln 2,$$

так как  $V_2/V_1 = 2$ . Вследствие постоянства температуры изменение энтропии системы записывается в виде

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \nu R \ln 2 = \nu k N_A \ln 2 = k N \ln 2,$$

где  $N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  — постоянная Авогадро,  $N = \nu N_A$  — полное число молекул газа. Решение этой задачи на основе статистического подхода см. в п. 3.3.8°.

## 3.2. Основы статистической механики

1°. Все макроскопические системы состоят из атомов и молекул, находящихся в непрерывном хаотическом тепловом движении.

**Диффузия** — самостоятельное перемешивание атомов или молекул, обусловленное их хаотическим тепловым движением. При диффузии происходит проникновение атомов или молекул одного вещества в промежутки между молекулами или атомами другого. При **самодиффузии** происходит перемешивание молекул одного вида.

**Броуновское движение** — тепловое движение взвешенных в жидкости или газе частиц, размеры которых значительно превышают размеры атомов или молекул. Среднее расстояние, на которое броуновская частица удаляется за время  $t$  от точки, где она находилась в начальный момент времени  $t = 0$ , пропорционально  $\sqrt{t}$ . Кроме того, это расстояние возрастает с термодинамической температурой  $T$ .

**2°. Линейные размеры** многих молекул составляют величину порядка  $10^{-8}$  см. Размеры молекул высокомолекулярных соединений гораздо больше (например, длина молекулы каучука составляет 0,02 мм).

Вследствие электрической нейтральности атомов и молекул межмолекулярные силы взаимодействия являются **короткодействующими**. На расстояниях, превышающих размеры молекул в несколько раз, эти силы практически не сказываются. **Силы взаимодействия** молекул друг с другом представляют собой равнодействующие сил притяжения и

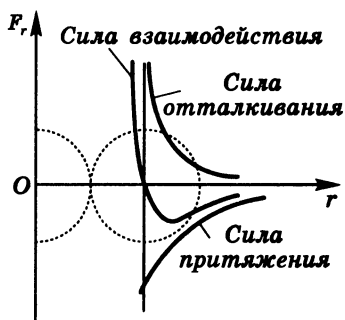


Рис. 3.11.

Межмолекулярные силы

отталкивания, компенсирующих друг друга на некотором равновесном расстоянии между молекулами. Силы отталкивания практически исчезают, когда расстояние между молекулами в два-три раза превышает диаметр молекул, и резко возрастают при сближении молекул, когда электронные оболочки начинают перекрываться (п. 7.5.2°). Сила притяжения медленнее спадает с расстоянием, чем сила отталкивания. На рис. 3.11

изображены примерные зависимости проекций сил отталкивания и притяжения и равнодействующей силы от расстояния между центрами молекул.

*Относительной молекулярной (или атомной) массой* вещества  $M_r$  (или  $A_r$ ) называется отношение массы молекулы (или атома)  $m_0$  данного вещества к  $1/12$  части массы ядра изотопа углерода-12  $m_C$ , т. е. к атомной единице массы:

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12}m_C}. \quad (3.29)$$

Из этого определения ясно, что  $M_r$  — безразмерная величина. *Атомная единица массы* (а. е. м.) в углеродной шкале, выраженная в килограммах, равна

$$1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{12}m_C = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Масса одной молекулы любого вещества в килограммах составляет

$$m_0 = 1,6605402 \cdot 10^{-27} M_r \text{ кг.}$$

**3°. Количество вещества** — физическая величина, определяемая числом структурных элементов данного вещества — атомов, молекул, ионов и т. д.

*Моль* — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в образце углерода-12 массой 0,012 кг (п. 7.6.1°). Количество вещества  $\nu$  в любой физической системе определяется числом содержащихся в ней молей.

*Молярной массой*  $M$  называется масса вещества, взятого в количестве одного моля. *Постоянная Авогадро* — число  $N_A$  молекул (или атомов) в одном моле вещества:

$$N_a = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Молярная масса  $M$  равна произведению массы молекулы  $m_0$  на постоянную Авогадро  $N_A$ :

$$M = m_0 N_A$$

и выражается в килограммах на моль (кг/моль). Масса системы  $m$  пропорциональна содержащемуся в ней количеству вещества (числу молей)  $\nu$ :

$$m = \nu M.$$

4°. *Идеальный газ* — простейшая физическая модель реального газа, в которой можно пренебречь линейными размерами молекул и считать, что они движутся по законам классической механики и взаимодействуют между собой только во время столкновений, которые носят характер упругого удара. Давление газа на стенку в такой модели рассматривается как суммарный усредненный результат ударов о стенку отдельных молекул, при которых молекулы передают стенке некоторый импульс.

Основное уравнение кинетической теории идеального газа имеет вид

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle, \quad (3.30)$$

где  $n = N/V$  — среднее число молекул в единице объема или *концентрация* молекул. Среднее значение квадрата скорости молекул  $\langle v^2 \rangle$  определяется соотношением

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2). \quad (3.31)$$

Введя среднюю кинетическую энергию (п. 2.4.5°) хаотического движения молекул:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle,$$

можно переписать (3.30) в виде

$$p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle. \quad (3.32)$$

Домножая это равенство на объем газа  $V$ , получаем

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon \rangle.$$



Сравнивая это выражение с уравнением Клапейрона — Менделеева (3.5) и учитывая, что  $N = \nu N_A$ , приходим к равенству (3.3):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (3.33)$$

где  $k = R/N_A = 1,380658 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

Формула (3.33) дает среднее значение энергии хаотического движения молекул для одноатомного газа. Для многоатомных газов она дает среднее значение только кинетической энергии поступательного движения молекул. Выражение (3.32) с помощью (3.33) можно переписать так:

$$p = nkT. \quad (3.34)$$

Внутренняя энергия одного моля одноатомного идеального газа не зависит от объема газа и равна

$$U = N_A \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k N_A T = \frac{3}{2} RT. \quad (3.35)$$

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа дает обоснование открытым экспериментально законам, описывающим свойства реальных газов.

**Закон Авогадро:** при равных давлениях и температурах в одинаковых объемах любых газов содержится одинаковое число молекул. В частности, один моль любого газа при нормальных условиях ( $T = 273,15$  К,  $p = 101\,325$  Па) занимает объем  $22,414 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль.

**Закон Дальтона:** давление смеси газов равно сумме парциальных давлений каждого из газов (п. 3.4.3°, 3.4.4°).

### 3.3. Статистические распределения

1°. В состоянии термодинамического равновесия макроскопические параметры системы не меняются со временем. Однако координаты и импульсы отдельных молекул непрерывно изменяются благодаря хаотическому тепловому движению. Тем не менее полный беспорядок, которым характеризуется

тепловое движение молекул, имеет свои законы: в состоянии термодинамического равновесия физическая система характеризуется определенными средними значениями различных величин и определенным законом распределения значений этих величин у отдельных молекул. В частности, существует неизменное во времени распределение молекул по скоростям и координатам. Знание этих распределений позволяет вычислять средние значения микроскопических параметров системы, например среднее значение квадрата скорости молекул, определяемое формулой (3.31).

Аналогичная задача возникает в *математической статистике*, когда приходится вычислять средние значения *случайных* величин, т. е. таких, которые могут принимать произвольные значения, лежащие в определенной области (§ M11.2). Например, при одновременном бросании двух игральных костей может выпасть от 1 до 12 очков. В математической статистике закон распределения случайных величин берется из данных эксперимента либо выводится на основе эвристических соображений (типа гипотезы о равной вероятности выпадения любой грани игральной кости). В статистической механике законы распределения физических величин выводятся на основе динамических уравнений движения частиц системы и некоторой статистической гипотезы (например, о равной вероятности различных микросостояний).

В термодинамическом равновесии в любой макроскопической системе *статистические распределения* физических величин имеют универсальный вид, установленный Гиббсом. В частности, закон распределения молекул по любой характеризующей их состояние величине (координате, скорости и т. д.) имеет экспоненциальный характер, причем в показателе экспоненты стоит взятое со знаком минус отношение характерной энергии молекулы к величине  $kT$ , которая пропорциональна средней кинетической энергии хаотического теплового движения молекул.

Частными случаями *распределения Гиббса* являются распределение скоростей молекул идеального газа (*распределение*

Максвелла) и распределение положения молекул в пространстве в любом потенциальном поле (*распределение Больцмана*).

2°. Доля  $\Delta N/N$  полного макроскопического числа  $N$  молекул идеального газа, проекции скорости которых  $v_x$ ,  $v_y$ , и  $v_z$  лежат в заданных малых интервалах от  $v_x$  до  $v_x + \Delta v_x$ , от  $v_y$  до  $v_y + \Delta v_y$  и от  $v_z$  до  $v_z + \Delta v_z$ , равна

$$\frac{\Delta N}{N} = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_0 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z. \quad (3.36)$$

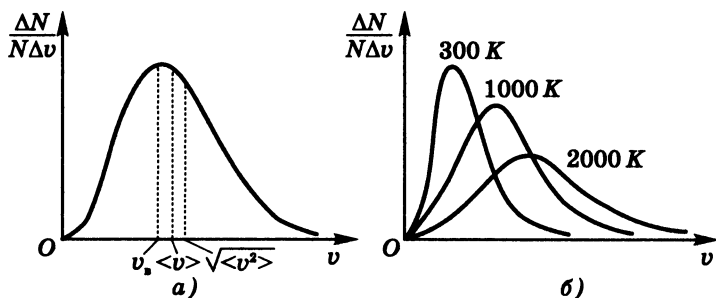


Рис. 3.12.

Распределение молекул по скоростям (а) и его изменение с температурой (б)

Доля  $\Delta N/N$  полного макроскопического числа  $N$  молекул идеального газа, модуль скорости которых  $v$  лежит в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ , равна (рис. 3.12)

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \Delta v. \quad (3.37)$$

3°. Формулу (3.36) можно трактовать как вероятность того, что произвольно выбранная молекула имеет проекции скорости в указанном интервале. Соответственно формулу (3.37) можно трактовать как вероятность того, что произвольно выбранная молекула имеет модуль скорости, лежащий в указанном интервале (§ M11.1).

В статистической механике *вероятностью* обнаружения системы в определенном состоянии  $l$  называется величина

$$P(l) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{n(l)}{q}, \quad (3.38)$$

где  $q$  — полное число выполненных над системой измерений,  $n(l)$  — число случаев, когда при измерении система обнаруживалась в состоянии  $l$ . Практически  $q$  следует брать настолько большим, чтобы отношение  $n(l)/q$  не менялось существенно при увеличении  $q$  в несколько раз (см. также п. М11.1.4°). Очевидно, что  $P(l) > 0$ , а сумма вероятностей обнаружить систему в одном из ее допустимых состояний (вероятность достоверного события) принимается за единицу (*условие нормировки*):

$$\sum_l P(l) = 1. \quad (3.39)$$

4°. Пусть в системе, находящейся в состоянии  $l$ , физическая величина  $A$  (например, энергия, магнитный момент и т. д.) принимает значение  $A(l)$ . Среднее значение (математическое ожидание)  $\langle A \rangle$  величины  $A$  определяется формулой (п. М11.2.2°)

$$\langle A \rangle = \sum_l P(l) A(l). \quad (3.40)$$

Видно, что выражение (3.36) соответствует определению вероятности (3.38) и удовлетворяет условию нормировки (3.39), если под  $\sum_l$  понимать интеграл по всем возможным значениям проекций скорости:

$$\left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{m_0 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) dv_x dv_y dv_z = 1. \quad (3.41)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для выражения (3.37):

$$4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^2 \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv = 1. \quad (3.42)$$

Среднее значение квадрата скорости  $\langle v^2 \rangle$ , вычисляемое в соответствии с (3.40) и (3.37) как

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv = \frac{3kT}{m_0}, \quad (3.43)$$

соответствует определению (3.31) для  $\langle v^2 \rangle$ .

Распределение Максвелла позволяет вычислять различные средние значения величин, зависящих от скорости молекулы. Например, среднее значение модуля скорости молекул  $\langle v \rangle$ , определяемое соотношением

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} (v_1 + v_2 + \dots + v_N), \quad (3.44)$$

равно

$$\langle v \rangle = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp \left( -\frac{m_0 v^2}{2kT} \right) dv = \left( \frac{8kT}{\pi m_0} \right)^{1/2}. \quad (3.45)$$

Наиболее вероятное значение модуля скорости молекул  $v_*$ , соответствующее максимуму (п. М5.4.3°) функции распределения (3.37), равно (рис. 3.12, а)

$$v_* = \left( \frac{2kT}{m_0} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

При повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям деформируется так, как показано на рис. 3.12, б. Максимум кривой смещается при увеличении  $T$  в область больших значений  $v$ . Максимальное значение  $\Delta N/N$  при этом убывает, так что площадь под кривой остается неизменной и равной единице в соответствии с (3.42).

**5°. Распределение Больцмана** — это равновесное распределение молекул в пространстве в любом потенциальном поле:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp \left( -\frac{\varepsilon_{\text{пот.}}(\mathbf{r})}{kT} \right), \quad (3.47)$$

где  $\varepsilon_{\text{пот.}}(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия молекулы в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $n(\mathbf{r})$  — концентрация молекул в этой точке,

$n_0$  — концентрация молекул в точке, где их потенциальная энергия равна нулю. В частности, в однородном поле тяжести, где  $\varepsilon_{\text{пот.}} = m_0 g z$  ( $m_0$  — масса молекулы), имеем

$$n(z) = n_0 \exp \left( -\frac{m_0 g z}{kT} \right). \quad (3.48)$$

**6°.** Термодинамическое равновесие — это всегда динамическое равновесие, поскольку тепловое движение атомов или молекул никогда не прекращается. Макроскопические параметры системы при этом не являются строго постоянными, а испытывают малые беспорядочные колебания вблизи некоторых средних значений. *Флуктуации* — это хаотические отклонения физических величин от их средних значений, вызываемые тепловым движением образующих систему частиц.

Основные закономерности флуктуаций видны на примере пространственного распределения молекул идеального газа внутри сосуда в состоянии термодинамического равновесия. В среднем газ равномерно заполняет весь объем сосуда, однако в каждый момент времени это верно лишь приближенно, так как движущиеся молекулы непрерывно переходят из одной части сосуда в другую.

Вероятность  $P(n)$  того, что в определенной половине сосуда находится  $n$  молекул из полного их числа  $N$ , легко найти в предположении, что вероятность нахождения одной молекулы в определенной половине сосуда равна  $1/2$  и не зависит от того, где в этот момент находятся остальные молекулы. Искомая вероятность равна отношению числа способов размещения молекул, при которых любые  $n$  из них находятся в выбранной половине сосуда, к полному числу возможных распределений  $N$  молекул по двум половинам сосуда, равному  $2^N$ . Число таких распределений равно числу способов, которыми можно выбрать  $n$  молекул из совокупности  $N$  молекул, т. е. числу сочетаний из  $N$  по  $n$  (п. М11.1.3°):

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (3.49)$$

Вероятность  $P(n)$  того, что в какой-либо половине сосуда находится  $n$  молекул, равна

$$P(n) = \frac{N!}{2^N n!(N-n)!} \quad (3.50)$$

(биномиальное распределение, см. п. М11.1.3°). На рис. 3.13, а показано распределение вероятностей для газа из  $N = 20$  молекул, которое можно охарактеризовать плавной кривой (огibaющей). С увеличением полного числа молекул газа эта кривая становится все более острой и переходит в распределение Гаусса (п. М11.1.3°). Для  $N = 100$  она приведена на рис. 3.13, б. Относительная флуктуация тем меньше, чем больше размеры системы (порядка  $1/\sqrt{N}$ , см. п. М11.2.2°).

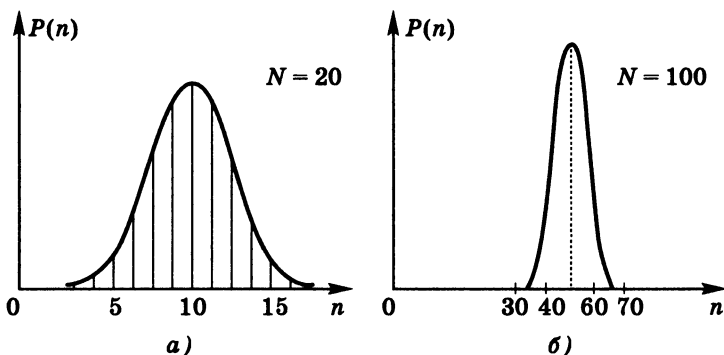


Рис. 3.13.

Распределение вероятностей для газа  $N = 20$  (а) и  $N = 100$  (б)

7°. Статистический подход вскрывает причины необратимости реальных процессов и определенной направленности энергетических превращений в природе. В замкнутой системе процессы развиваются в таком направлении, при котором менее вероятные макроскопические состояния системы заменяются на более вероятные. *Необратимый* процесс — это процесс, обратный которому маловероятен.

8°. *Термодинамической вероятностью* или *статистическим весом* данного макроскопического состояния называется

число различных микросостояний, реализующих данное макросостояние. Пусть, например, макросостояние газа в сосуде задается числом  $n$  молекул, находящихся в определенной половине сосуда. Его статистический вес  $W(n)$  — число способов размещения  $N$  молекул (3.49), которыми может быть реализовано данное макросостояние.

В статистической механике *энтропией* системы называется величина

$$S = k \ln W, \quad (3.51)$$

где  $k = 1,380658$  Дж/К — постоянная Больцмана (п. 3.2.4°). Определенная таким образом энтропия совпадает с энтропией, вводимой в термодинамике (п. 3.1.14°). В замкнутых системах энтропия системы не убывает:  $\Delta S = 0$  при обратимых процессах и  $\Delta S > 0$  при необратимых процессах.

### Пример

Идеальный газ находится в одной половине теплоизолированного сосуда, разделенного перегородкой на две равные части. Определим изменение энтропии газа, если перегородка внезапно разрушится и газ заполнит весь сосуд (п. 3.1.14°).

Статистический вес начального состояния газа равен единице:  $W_1 = 1$ , так как существует только одно микросостояние, при котором все молекулы находятся в одной половине сосуда. В конечном состоянии молекулы распределены по половинам сосуда почти поровну (строго поровну, если отвлечься от флуктуаций). Вследствие исключительной остроты максимума кривой распределения вероятностей различных размещений молекул газа по половинам сосуда приближенно можно считать, что все остальные микросостояния системы ( $2^N - 1$ ) соответствуют конечному макросостоянию:

$$W_2 \approx 2^N - 1 \approx 2^N.$$

Поэтому, в соответствии с (3.51),

$$\Delta S = k (\ln W_2 - \ln W_1) = kN \ln 2.$$



При строгом решении следует воспользоваться формулой (3.49) при  $n = N/2$ :

$$W_2 = C_N^{N/2} = \frac{N!}{[(N/2)!]^2}$$

и формулой Стирлинга (п. М6.1.3°):

$$n! \approx (2\pi n)^{1/2} (n/e)^n.$$

В результате имеем

$$\ln W_2 \approx N \ln 2 - \frac{1}{2} \ln N.$$

Поскольку  $N \approx 10^{23}$ , то  $\ln N \approx 50$ , и для энтропии получаем прежнее значение (п. 3.1.14°):

$$\Delta S = kN \ln 2.$$

### 3.4. Реальные газы

1°. Учет поправок, связанных с собственными размерами молекул газа и наличием взаимодействия между ними, позволяет получить приближенные *уравнения состояния* реальных газов. Одно из таких уравнений — *уравнение Ван-дер-Ваальса*. Для одного моля газа оно имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT. \quad (3.52)$$

Постоянные  $a$  и  $b$  определяются опытным путем таким образом, чтобы уравнение (3.52) наилучшим образом описывало поведение данного газа.

На рис. 3.14 приведены изотермы Ван-дер-Ваальса, соответствующие различным значениям температуры ( $T_1 > T_k > T_2 > T_3$ ). Существует температура  $T_k$  такая, что соответствующая ей изотерма отделяет монотонные изотермы, лежащие выше ее, от «горбатых», лежащих ниже. Такая температура (и соответствующая ей изотерма) называется *критической* (п. 3.4.3°). Критическая изотерма имеет одну точку перегиба (п. М5.4.40°).

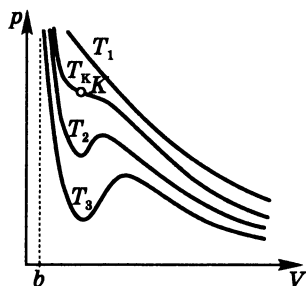


Рис. 3.14.

Изотермы Ван-дер-Ваальса

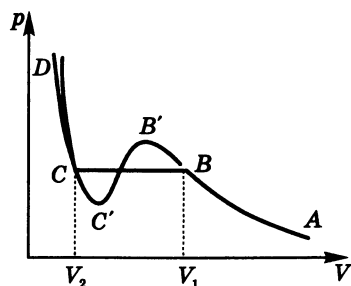


Рис. 3.15.

Изотерма углекислого газа

2°. На рис. 3.15 показана полученная экспериментально изотерма углекислого газа  $\text{CO}_2$ , соответствующая температуре, меньшей критической; там же показана и изотерма Ван-дер-Ваальса для той же температуры. На участке сжатия  $AB$  углекислый газ ведет себя подобно идеальному газу. При дальнейшем сжатии на участке  $BC$  появляется жидкая углекислота, масса ее увеличивается с уменьшением объема, пока в точке  $C$  весь газ не сконденсируется в жидкость. Участок  $BC$  соответствует равновесию между жидкой углекислотой и ее насыщенным паром. При данной температуре  $T$  этому равновесию соответствует определенное давление  $p$ . Зависимость  $p(T)$  на  $p$ — $T$ -диаграмме дает *кривую равновесия* жидкой и газообразной фаз. Дальнейшее сжатие сопровождается резким увеличением давления при незначительном уменьшении объема, что соответствует малой *сжимаемости* жидкости.

Прямолинейный участок  $BC$  экспериментальной изотермы уменьшается с ростом температуры и при критической температуре  $T_k$  стягивается в одну точку  $K$  (рис. 3.14), т. е. при  $T > T_k$  существование жидкой фазы невозможно ни при каких давлениях. Соответствующие точке  $K$  давление и объем называются *критическими*. Состояние вещества в точке  $K$  называется *критическим*.

Участки  $BB'$  и  $CC'$  могут быть осуществлены экспериментально. Первый из них отвечает *пересыщенному* пару и может быть реализован при постепенном сжатии газа в свободном от пыли и ионов пространстве. При появлении *центров*

*конденсации* — ионов, пылинок — пересыщенный пар мгновенно конденсируется в туман. Пересыщенный пар можно получить не только при изотермическом сжатии, но и при охлаждении *насыщенного* пара. Он иногда называется также *переохлажденным*. Участок  $CC'$  соответствует *перегретой* жидкости и может быть реализован нагреванием жидкости при постоянном давлении в условиях, исключающих возникновение кипения, — жидкость и стенки сосуда не должны содержать растворенных газов. Участок  $B'C'$  соответствует абсолютно неустойчивым состояниям вещества и не реализуется в эксперименте.

Таким образом, эмпирическое уравнение Ван-дер-Ваальса, полученное с целью введения малых поправок к уравнению состояния идеального газа, оказалось эффективным и в более широкой области. Уравнение Ван-дер-Ваальса указывает на существование некоторой критической температуры, пересыщенного пара, перегретой жидкости и может качественно описать малую сжимаемость жидкостей.

Газ можно перевести в жидкое состояние путем сжатия без охлаждения только при температуре ниже критической. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется *паром*.

**3°. Парообразование.** Наличие других газов или паров над поверхностью жидкости не влияет на процесс образования пара. Давление пара данного вещества называется *парциальным*; его максимальное значение равно давлению насыщенного пара соответствующей жидкости.

**Закон Дальтона:** давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений (п. 3.2.4°).

*Испарение* — это процесс парообразования, при котором с поверхности жидкости или твердого тела вылетают молекулы, кинетическая энергия которых достаточна для преодоления сил притяжения со стороны остальных молекул. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется *насыщенным*. Не зависящее от объема парциаль-

ное давление пара, при котором жидкость находится в динамическом равновесии со своим паром, называется *давлением насыщенного пара*. Давление насыщенного пара растет с увеличением температуры.

*Кипение* — процесс испарения внутри жидкости, происходящий при температуре, когда давление насыщенного пара в пузырьках становится равным давлению в жидкости.

*Критическая температура* — температура, при которой исчезают различия в физических свойствах между жидкостью и ее насыщенным паром. На рис. 3.16 показана зависимость плотности жидкости и ее насыщенного пара от температуры. Кривые сливаются при  $T = T_k$ .

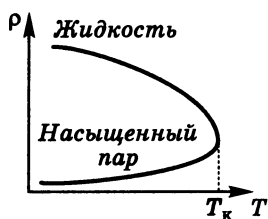


Рис. 3.16.  
Зависимость плотности  
от температуры

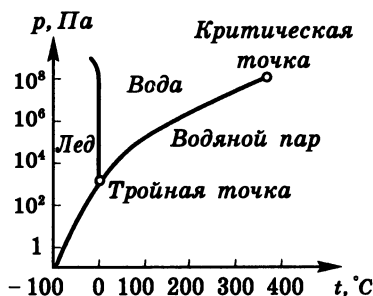


Рис. 3.17.  
Равновесие фаз

4°. *Абсолютная влажность* — парциальное давление  $p$  водяного пара. Таким образом, это давление, которое производил бы водяной пар, если бы все остальные газы отсутствовали. *Относительная влажность* — это отношение (в процентах) парциального давления  $p$  водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению  $p_0$  насыщенного пара при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\%. \quad (3.53)$$

*Точка росы* — температура, при которой находящийся в воздухе водяной пар становится насыщенным. Точка росы позволяет определить парциальное давление водяного пара

Таблица 3.1

**Давление и плотность насыщенного водяного пара  
при различных температурах**

$t, ^\circ\text{C}$	$p$		$\rho_{\text{max}},$ $10^{-3}$ $\text{кг/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p$		$\rho_{\text{max}},$ $10^{-3}$ $\text{кг/м}^3$
	кПа	мм рт. ст.			кПа	мм рт. ст.	
-5	0,401	3,01	3,25	12	1,401	10,51	10,67
-4	0,437	3,28	3,53	13	1,497	11,23	11,36
-3	0,463	3,47	3,83	14	1,597	11,98	12,08
-2	0,517	3,88	4,14	15	1,704	12,78	12,84
-1	0,563	4,22	4,49	16	1,817	13,63	13,65
0	0,611	4,58	4,85	17	1,937	14,53	14,50
1	0,656	4,92	5,20	18	2,062	15,47	15,39
2	0,705	5,59	5,57	19	2,196	16,47	16,32
3	0,757	5,68	5,95	20	2,337	17,53	17,32
4	0,813	6,10	6,37	21	2,486	18,65	18,35
5	0,872	6,54	6,80	22	2,642	19,82	19,44
6	0,935	7,01	7,27	23	2,809	21,07	20,60
7	1,005	7,54	7,79	24	2,984	22,38	21,81
8	1,072	8,04	8,28	25	3,168	23,76	23,07
9	1,148	8,61	8,83	26	3,361	25,21	24,40
10	1,227	9,20	9,41	27	3,565	26,74	25,79
11	1,312	9,84	10,02	28	3,780	28,35	27,26

и относительную влажность с помощью таблицы значений давления насыщенного пара при различных температурах (табл. 3.1).

**5°. Тройная точка** — точка на  $p$ — $T$ -диаграмме, в которой сходятся три кривые равновесия фаз:

1) кривая зависимости температуры кипения от давления (кривая равновесия жидкой и газообразной фаз);

2) кривая зависимости температуры плавления от давления (кривая равновесия жидкой и твердой фаз);

3) кривая зависимости давления пара над твердой фазой от температуры (кривая равновесия твердой и газообразной фаз).

На рис. 3.17 приведены эти кривые для  $\text{H}_2\text{O}$ . Координаты тройной точки воды:  $T = 273,16 \text{ К}$  ( $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$ ),  $p = 610,6 \text{ Па}$  ( $4,58 \text{ мм рт. ст.}$ ). Тройная точка воды используется для определения основной единицы термодинамической температуры в СИ *кельвин*: кельвин равен  $1/273,16$  части термодинамической температуры тройной точки воды.

### 3.5. Жидкости

1°. *Поверхностная энергия* — избыток потенциальной энергии молекул в поверхностном слое по сравнению с энергией молекул внутри фаз (вдали от границы), обусловленный различием межмолекулярных взаимодействий в обеих фазах. *Сила поверхностного натяжения* — сила, которая действует вдоль поверхности жидкости перпендикулярно линии, ограничивающей эту поверхность. Благодаря поверхностному натяжению жидкость в отсутствие внешних сил принимает форму шара, т. е. имеет минимальную при данном объеме поверхность, что обеспечивает минимальное значение поверхностной энергии. *Поверхностное натяжение*  $\sigma$  — отношение модуля  $F$  силы поверхностного натяжения, действующей на границу поверхностного слоя, к длине границы  $l$  (или, что то же самое, отношение поверхностной энергии к площади поверхности):

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (3.54)$$

Значения поверхностного натяжения некоторых жидкостей представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

**Поверхностное натяжение некоторых жидкостей**  
(в  $10^{-2} \text{ Н/м}$  при  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ )

Ацетон	2,37	Глицерин	6,4	Спирт этиловый	2,23
Бензин	2,89	Керосин	2,6	Хлороформ	2,72
Вода	7,27	Скипидар	2,7		

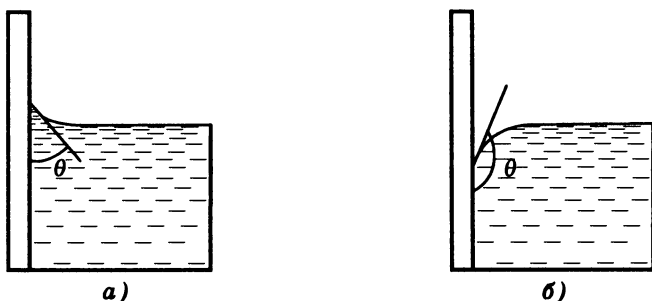


Рис. 3.18.

Краевой угол в случае смачивания (а) и несмачивания (б)

**2°. Смачивание** — явление, возникающее вследствие взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердых тел и приводящее к искривлению поверхности жидкости у поверхности твердого тела. Если сила взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела больше силы взаимодействия между молекулами самой жидкости, то жидкость является смачивающей и угол  $\theta$  между плоскостью, касательной к поверхности жидкости (§ M9.7), и поверхностью твердого тела (*краевой угол, угол смачивания*) будет острым (рис. 3.18, а). В противном случае угол  $\theta$  будет тупым (рис. 3.18, б). При полном смачивании  $\theta = 0$ , при полном несмачивании  $\theta = \pi$ .

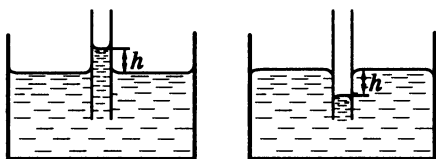


Рис. 3.19.

Жидкость в капиллярах

*Капиллярные явления* — подъем или опускание жидкости в узких трубках — капиллярах вследствие явления смачивания (рис. 3.19). Искривление поверхности жидкости ведет к появлению

в жидкости дополнительного *капиллярного давления*  $\Delta p$ , которое связано со средним радиусом кривизны  $r$  поверхности (§ M9.7) уравнением Лапласа

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{r}, \quad (3.55)$$

где  $p_1$  — давление в жидкости,  $p_2$  — давление в контактирующей с жидкостью фазе.

Для сферической поверхности радиуса  $R$  средний радиус  $r = R$ ; для цилиндрической поверхности  $r = 2R$ . В случае вогнутой поверхности жидкости  $r < 0$ ,  $p_1 < p_2$  и  $\Delta p < 0$ ; в случае выпуклой поверхности  $r > 0$ ,  $p_1 > p_2$  и  $\Delta p > 0$ . Высота подъема (или опускания) жидкости  $h$  в капилляре определяется условием уравнивания капиллярного давления гидростатическим давлением столба жидкости, возникающим благодаря разности уровней жидкости в сосуде и капилляре

$$\Delta p = \rho gh, \quad (3.56)$$

где  $h < 0$  (уровень жидкости выше в капилляре) при смачивающей жидкости (когда  $r < 0$ ) и  $h > 0$  (уровень жидкости выше в сосуде) при несмачивающей жидкости (когда  $r > 0$ ).

При полном смачивании высота подъема жидкости в капилляре радиуса  $R$  равна

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}.$$

Эту высоту можно определить также, приравнявая силу поверхностного натяжения, действующую вдоль границы поверхностного слоя, силе тяжести, действующей на образовавшийся столб жидкости.

### 3.6. Твердые тела

1°. Твердые тела делятся на кристаллические и аморфные. *Кристаллы* — твердые тела, атомы или молекулы которых занимают определенные упорядоченные положения в пространстве — образуют *кристаллическую решетку* (п. М8.4.2°). Кристаллы обладают *анизотропией* — их физические свойства зависят от направления внутри кристалла.

Различают *монокристаллы* — крупные одиночные кристаллы — и *поликристаллы*, состоящие из множества отдельных беспорядочно ориентированных мелких (но макроскопических) кристаллических зерен — кристаллитов. В природе встречаются монокристаллы различных размеров — от громадных (до сотен килограммов) кристаллов кварца (горного



хрусталя), полевого шпата и других минералов до мелких кристаллов алмаза. К поликристаллам относятся, например, технические металлы, сплавы, многие горные породы.

Нарушения строгой периодичности в расположении атомов (или молекул) в кристаллической решетке называются *дефектами в кристаллах*. Дефекты бывают точечными и линейными; последние называются *дислокациями*. Дефекты влияют на физические свойства кристаллов и определяют их прочность.

*Аморфные тела* — твердые тела, у которых, как и у жидкостей, отсутствует строгий порядок в расположении атомов или молекул. Только ближайшие соседи располагаются в некотором порядке, называемом *ближним порядком*, в отличие от *дальнего порядка* в кристаллах. Аморфные тела *изотропны* — их физические свойства одинаковы по всем направлениям в пространстве.

**2°.** Деформации, полностью исчезающие с прекращением действия внешней силы, называются *упругими*. Деформации, не исчезающие после прекращения действия сил, называются *пластическими*.

*Деформация растяжения (сжатия)* стержня характеризуется *абсолютным* удлинением  $\Delta l = l - l_0$  и *относительным* удлинением  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ , где  $l_0$  и  $l$  — начальная и конечная длина стержня. При упругой деформации справедлив *закон Гука*: относительное удлинение пропорционально напряжению:

$$\frac{|\Delta l|}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad \text{или} \quad \sigma = E|\varepsilon|, \quad (3.57)$$

где  $\sigma = F/S$  — *напряжение* в стержне, равное отношению действующей силы  $F$  к площади поперечного сечения  $S$ ,  $E$  — *модуль Юнга (модуль продольной упругости)*. Закон Гука можно записать в виде

$$F = k|\Delta l|,$$

где  $k$  — *жесткость* стержня, связанная с модулем Юнга и размерами стержня соотношением

$$k = SE/l_0.$$

Механическое напряжение в продольном направлении, кроме удлинения, вызывает *поперечное сжатие* стержня; при этом

$$(\Delta d)/d = -\mu(\Delta l)/l, \quad \text{или} \quad \varepsilon_n = -\mu\varepsilon, \quad (3.58)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $d$  — поперечный размер стержня (диаметр, толщина стержня и т. д.),  $\Delta d$  — изменение поперечного размера,  $\varepsilon_n$  — относительное изменение поперечного размера стержня.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала и не зависят от размеров и формы тела. Все прочие упругие постоянные выражаются через  $E$  и  $\mu$ .

При *всестороннем* (гидростатическом) *сжатии* тела относительное изменение его объема можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p, \quad (3.59)$$

где  $p$  — давление,  $K$  — *модуль всестороннего сжатия* тела, связанный с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\mu$  соотношением

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (3.60)$$

Формула (3.59) применима к телам произвольной формы. Значения упругих постоянных для некоторых веществ представлены в табл. 3.3.

Деформация сдвига показана на рис. 3.20 и возникает, когда к параллельным плоскостям тела приложены касательные силы, направленные в противоположные стороны. Деформация сдвига характеризуется *углом сдвига*  $\gamma$ . При упругой деформации

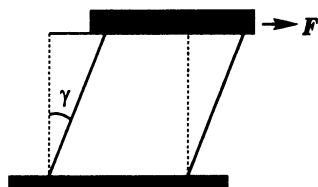


Рис. 3.20.  
Деформация сдвига

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}, \quad \text{или} \quad \tau = G\gamma, \quad (3.61)$$

Таблица 3.3

## Упругие постоянные некоторых веществ

Вещество	Модуль Юнга, $10^{10}$ Па	Модуль всестороннего сжатия, $10^{10}$ Па	Коэффициент Пуассона
Алюминий	7,0	7,5	0,34
Цинк	8,0	3,5	0,23
Железо	21,0	16,0	0,28
Чугун	11,0	9,5	0,27
Золото	8,0	16,5	0,42
Бронза	10,5	9,0	0,36
Медь	11,0	13,5	0,34
Латунь	9,0	6,0	0,35
Олово	5,3	5,3	0,33
Сталь	22,0	16,0	0,28
Серебро	7,7	10,5	0,37
Стекло крон	6,0	5,0	0,25

где  $F$  — сила, параллельная плоскости  $S$ ,  $S$  — площадь поверхности,  $\tau$  — касательное напряжение,  $G$  — модуль сдвига. Модуль сдвига связан с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношением

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.62)$$

*Деформация изгиба* сводится к растяжениям и сжатиям в различных частях тела (рис. 3.21).

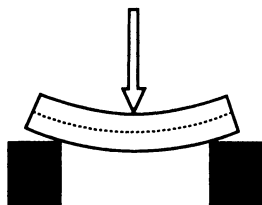


Рис. 3.21.  
Деформация изгиба

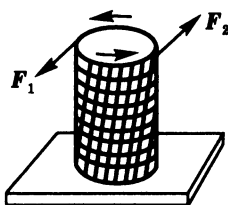


Рис. 3.22.  
Деформация кручения

*Деформация кручения* представляет собой неоднородный сдвиг — отдельные слои тела, как и при сдвиге, остаются параллельными, но поворачиваются на некоторый угол друг относительно друга (рис. 3.22). Момент сил  $M$ , необходимый для закручивания круглого стержня на угол  $\varphi$ , пропорционален углу:

$$M = D\varphi,$$

где  $D$  — *модуль кручения*, который выражается через модуль сдвига  $G$ , длину  $l$  и радиус  $R$  сечения стержня:

$$D = \frac{\pi G}{2l} R^4.$$

**3°. Твердые тела** при нагревании расширяются во всех направлениях. Тонкие стержни и проволоки расширяются в основном в длину, однако, разумеется, относительное удлинение  $\Delta l/l$  не зависит от направления (при расширении сохраняется геометрическое подобие). При *линейном расширении* (п. М2.4.1°)

$$l_2 = l_1 (1 + \alpha \Delta t), \quad (3.63)$$

где  $l_1$  — длина стержня при температуре  $t_1$ ,  $l_2$  — длина при температуре  $t_2$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\alpha$  — *температурный коэффициент линейного расширения*.

*Объемное расширение* при расчетах можно рассматривать как наложение линейных расширений в трех направлениях:

$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta t), \quad (3.64)$$

где  $V_1$  — объем при температуре  $t_1$ ,  $V_2$  — объем при температуре  $t_2$ ,  $\beta$  — *температурный коэффициент объемного расширения*:

$$\beta = 3\alpha.$$

Температурный коэффициент объемного расширения твердого тела слабо зависит от температуры (табл. 3.4).

Жидкости при нагревании расширяются значительно сильнее твердых тел. Справедлива формула

$$V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta t). \quad (3.65)$$

Таблица 3.4

**Температурный коэффициент объемного расширения  
некоторых веществ**

Вещество	Температура, К	Коэффициент объемного расширения, $10^{-6} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	25	1,5
	293	69
	600	85
Углерод (графит)	100	0,15
	293	3,0
	600	9,0
Железо	25	0,6
	293	36
	600	45
Медь	25	1,8
	293	50
	600	57
Свинец	25	43
	293	86
	500	96
Ртуть (твердое тело)	100	111
Ртуть (жидкость)	273–573	180
Плавленный кварц (некристаллический $\text{SiO}_2$ )	23	–2
	293	1,2
	600	1,8
Вода (твердое тело)	73	1,8
	173	93
	273	167
Вода (жидкость)	277–373	430

Температурный коэффициент объемного расширения жидкости слабо зависит от температуры. Вода является исключением. Коэффициент объемного расширения воды сильно зависит от температуры, а в интервале от 0 до 4 °С принимает отрицательное значение.

Объем и плотность жидкости обратно пропорциональны:

$$\rho_2/\rho_1 = V_1/V_2,$$

поэтому при расширении

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \beta \Delta t} \approx \rho_1 (1 - \beta \Delta t). \quad (3.66)$$

### 3.7. Теплообмен. Фазовые переходы

1°. Количество теплоты, необходимое для нагревания данного тела (при постоянном внешнем давлении), пропорционально его массе  $m$  и изменению температуры  $\Delta t$ :

$$Q = cm\Delta t. \quad (3.67)$$

Здесь  $c = C/m$  — удельная теплоемкость ( $C$  — теплоемкость тела, см. п. 3.1.8°). Значения удельной теплоемкости некоторых веществ приведены в табл. 3.5. Если привести в тепловой контакт тела с различными температурами, то в отсутствие фазовых переходов *уравнение теплового баланса* при выравнивании их температур имеет вид (если теплоемкости постоянны)

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2), \quad t_1 > t_2, \quad (3.68)$$

где  $t$  — установившаяся температура, одинаковая для обоих тел.

Таблица 3.5

**Удельная теплоемкость некоторых веществ**  
(в кДж/(кг · К))

Твердые вещества				Жидкие вещества	
Алюминий	0,896	Медь	0,385	Ацетон	2,160
Вольфрам	0,134	Никель	0,448	Вода	4,190
Железо	0,465	Олово	0,218	Глицерин	2,390
Золото	0,130	Свинец	0,13	Ртуть	0,138
Лед (0 °С)	2,090	Цинк	0,389	Этиловый спирт	2,390

2°. При сгорании (окислении) топлива высвобождается количество теплоты

$$Q = Hm, \quad (3.69)$$

где  $H$  — удельная теплота сгорания топлива,  $m$  — масса полностью сгоревшего топлива.

3°. Фазовый переход из твердого состояния в жидкое и обратно происходит при определенной температуре  $t_{\text{пл}}$ . Температура (точка) плавления зависит от давления. Фазовый переход из твердого состояния в жидкое (из жидкого в твердое) сопровождается поглощением (выделением) определенного количества теплоты

$$Q = qt, \quad (3.70)$$

где  $q$  — удельная теплота плавления,  $m$  — масса расплавленного (затвердевшего) тела.

При кипении (п. 3.4.3°) фазовый переход из жидкого состояния в газообразное происходит при определенной, сильно зависящей от давления температуре кипения  $t_{\text{кип}}$ . Фазовый переход из жидкого состояния в газообразное (из газообразного в жидкое) сопровождается поглощением (выделением) определенного количества теплоты

$$Q = \lambda m, \quad (3.71)$$

где  $\lambda$  — удельная теплота парообразования,  $m$  — масса испарившейся жидкости.

Характеристики фазовых переходов для некоторых веществ представлены в табл. 3.6.

### Пример

В идеальный калориметр, содержащий лед при  $0^\circ\text{C}$ , впускают некоторое количество водяного пара при температуре  $t_{\text{п}} = 100^\circ\text{C}$ , в результате чего весь лед тает и устанавливается температура  $t$ . Определим массу впущенного пара, если масса льда равна  $m$ .

Таблица 3.6

## Характеристики фазовых переходов некоторых веществ

Вещество	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления, кДж/кг	Температура кипения, °С	Удельная теплота паро- образования, кДж/кг
Алюминий	660	1060	2500	12 000
Вода	0	334	100	2256
Водород	−259	59	−253	454
Железо	1535	277	2735	6340
Золото	1063	66	2700	1650
Кремний	1415	2760	3250	16 000
Магний	650	1090	1095	6000
Медь	1083	205	2590	4790
Никель	1453	303	2800	6480
Олово	232	60	2430	2450
Плутоний	640	125	3350	1430
Ртуть	−39	12	357	285
Свинец	327	23	1750	8600
Титан	1670	1500	3300	10 000
Уран	1130	200	1200	2250
Цинк	420	111	907	1755
Этиловый спирт	−115	108	78	840

Уравнение теплового баланса в рассматриваемом случае имеет вид

$$qm + cmt = \lambda m_n + cm_n(t_n - t),$$

откуда

$$m_n = \frac{q + ct}{\lambda + c(t_n - t)} m,$$

где  $c$  — удельная теплоемкость воды.



## 4. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электромагнитное взаимодействие характеризуется наибольшей широтой и разнообразием проявлений в окружающем нас мире. Так происходит потому, что все тела построены из электрически заряженных частиц, электромагнитное взаимодействие между которыми во много раз интенсивнее гравитационного и является дальнодействующим в отличие от ядерного (сильного) взаимодействия. Электромагнитным взаимодействием определяются строение и свойства вещества — атомов, молекул, кристаллов, жидкостей и т. д.

### 4.1. Электростатика

1°. Существуют два рода *электрических зарядов* — положительные и отрицательные. *Положительным* называется заряд, возникающий на стекле, потертом о шелк, *отрицательным* — заряд, возникающий на эбоните, потертом о мех. Носителями отрицательных зарядов являются *электроны*, положительных — *протоны* (§ 7.7). По модулю заряды электрона и протона равны элементарному заряду  $e = 1,60217733 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Важнейшее свойство электрического заряда выражается *законом сохранения заряда*: в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается неизменной. Это фундаментальный закон природы.

Между электрически заряженными телами действуют силы. *Одноименные* заряды *отталкиваются* друг от друга, *разноименные* — *притягиваются*.

Взаимодействие неподвижных электрических зарядов описывается *законом Кулона*. Этот закон устанавливает зависимость силы взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме от их модулей  $|q_1|$ ,  $|q_2|$  и расстояния  $r$  между ними (в СИ):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \quad (4.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — *электрическая постоянная* (п. 1.2.6°). При помещении зарядов в вещество с *диэлектрической проницаемостью*  $\epsilon$  сила взаимодействия между ними уменьшается в  $\epsilon$  раз:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}. \quad (4.2)$$

В векторном виде закон взаимодействия электрических зарядов записывается так:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (4.3)$$

Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиусы-векторы зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . На рис. 4.1 изображен случай взаимодействия одноименных зарядов.

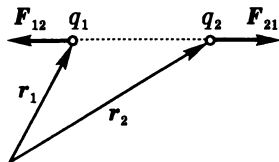


Рис. 4.1.  
Взаимодействие  
зарядов  
(одноименных)

**2°.** Электрические заряды наделяют окружающее их пространство особыми физическими свойствами — создают *электрическое поле*. Поле неподвижных неизменных во времени зарядов называется *электростатическим*.

Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность* — векторная величина, измеряемая отношением силы  $\mathbf{F}$ , действующей на положительный пробный заряд  $q$ , помещенный в данную точку поля, к заряду  $q$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (4.4)$$

*Энергетической* характеристикой электрического поля является *потенциал* — скалярная величина, измеряемая отношением работы  $A$ , совершаемой силами поля при перемещении заряда  $q$  из данной точки поля в некоторую точку, потенциал которой принимается равным нулю, к заряду  $q$ :

$$\varphi = \frac{A}{q}. \quad (4.5)$$

Разность потенциалов между двумя точками электрического поля называется *напряжением*:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

*Работа* сил электрического поля при перемещении заряда не зависит от формы траектории, а определяется положением ее начальной и конечной точек:

$$A_{1 \rightarrow 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \quad (4.6)$$

Электрическое поле удовлетворяет *принципу суперпозиции*. Напряженность поля, создаваемого зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (4.7)$$

Потенциал поля зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad (4.8)$$

Точка нулевого потенциала выбирается общей для всех зарядов. Обычно это бесконечно удаленная точка.

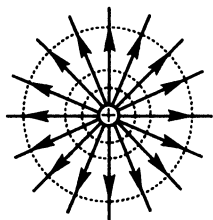


Рис. 4.2.

Поле точечного заряда

Электрическое поле можно изображать либо с помощью линий напряженности (силовых линий), либо с помощью эквипотенциальных поверхностей. *Линии напряженности* начинаются на положительных зарядах, никогда не пересекаются друг с другом и оканчиваются на отрицательных зарядах или уходят на бесконечность.

Касательные к линиям напряженности указывают направление силы, действующей на положительный пробный заряд в данной точке поля. *Эквипотенциальные поверхности* — множество точек поля, имеющих одинаковый потенциал. Линии напряженности ортогональны эквипотенциальным поверхностям.

Электрическое поле точечного заряда  $q$  сферически-симметрично. Модуль напряженности и потенциал поля определяются соотношениями

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{|q|}{r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r}. \quad (4.9)$$

Линии напряженности направлены радиально, а эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы с центром в точке, куда помещен заряд (рис. 4.2). Таким же является электрическое поле в пространстве, окружающем заряженный металлический шар. Внутри шара (сплошного или полого) напряженность поля равна нулю, а потенциал одинаков во всех точках (рис. 4.3).

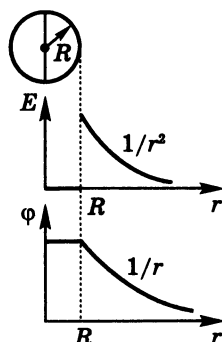


Рис. 4.3.  
Поле заряженного проводящего шара

Картина электрического поля системы двух разноименных и одноименных точечных зарядов показана на рис. 4.4. Система двух одинаковых по модулю разноименных зарядов называется *диполем*. *Дипольным электрическим моментом*  $p$  называется произведение модуля  $|q|$  одного заряда на расстояние  $l$  между зарядами:

$$p = |q|l.$$

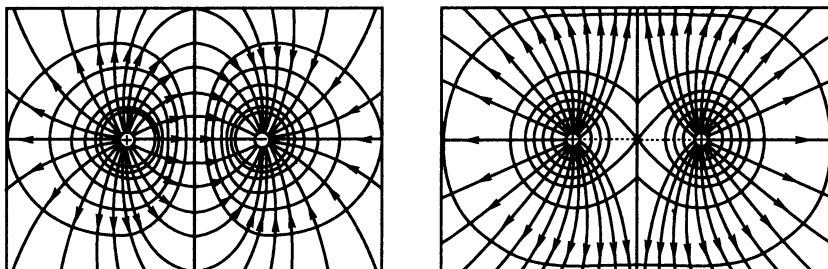


Рис. 4.4.

Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности поля разноименных и одноименных точечных зарядов

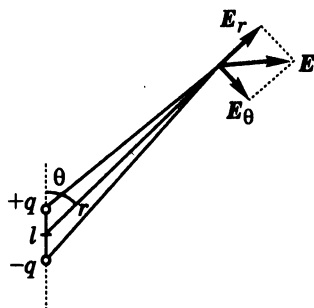


Рис. 4.5.  
Поле диполя

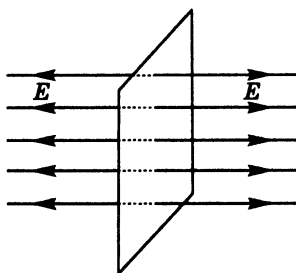


Рис. 4.6.  
Поле плоскости

Потенциал  $\varphi$  поля диполя (в вакууме) при  $l \ll r$  определяется выражением (рис. 4.5)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta. \quad (4.10)$$

Напряженность  $E$  поля диполя есть векторная сумма ортогональных составляющих  $E_r$  и  $E_\theta$ , проекции которых на направления  $e_r$  и  $e_\theta$  равны

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \cos \theta, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sin \theta, \quad (4.11)$$

так что модуль  $E$  равен

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (4.12)$$

Формулы (4.10) — (4.12) определяют электрическое поле на большом расстоянии не только для диполя, но и для любой электрически нейтральной системы зарядов, у которой центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают (например, для полярной молекулы).

Тело со сложным распределением заряда  $Q$  на достаточно большом расстоянии кажется просто точечным зарядом. Для нейтрального в целом тела ( $Q = 0$ ) можно подобрать диполь с таким электрическим моментом  $p$ , что создаваемое этим диполем электрическое поле на большом расстоянии будет практически эквивалентно полю тела со сложным распределением заряда.

В однородном электрическом поле напряженность одинакова во всех точках, а линии напряженности параллельны между собой. Такое поле создается, в частности, бесконечной равномерно заряженной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (4.13)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, измеряемая зарядом, приходящимся на единицу площади поверхности (рис. 4.6).

В однородном поле напряженность и напряжение связаны соотношением

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = El, \quad (4.14)$$

где  $l$  — расстояние между точками поля с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , находящимися на одной линии напряженности.

**3°. Поляризация диэлектрика** приводит к тому, что напряженность поля в нем становится меньше, чем в вакууме. *Диэлектрическая проницаемость*  $\epsilon$  вещества определяется отношением напряженности  $E_0$  электрического поля в вакууме к напряженности поля  $E$  в однородном диэлектрике, помещенном в это поле, при условии, что поверхность диэлектрика перпендикулярна линиям напряженности:

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Значения диэлектрической проницаемости для некоторых веществ приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ**

Воздух (сухой)	1,0006	Поливинил	4–8,5
Эбонит	2,7	Резина	3,3
Спирт этиловый	26	Тефлон	2,0
Стекло	4–7	Вода дистиллированная	81
Картон	5	Дерево	2,5–7
Парафин	2,1		

4°. Внутри *проводника* напряженность электрического поля равна нулю, а потенциал во всех точках одинаков. Во внешней области линии напряженности вблизи проводника перпендикулярны его поверхности. Нескомпенсированные заряды могут располагаться только на поверхности проводника, причем напряженность поля  $E$  вблизи поверхности связана с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  соотношением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (4.15)$$

В случае уединенного проводника поверхностная плотность заряда постоянна при одинаковой кривизне поверхности проводника во всех ее точках (шар, цилиндр). Плотность заряда и соответственно напряженность поля больше в местах с большей кривизной поверхности (§ M9.7).

5°. Если сообщать проводнику положительный электрический заряд, то его потенциал относительно какой-либо точки (например, Земли) будет возрастать пропорционально заряду:  $\varphi \sim q$ . Поэтому и заряд проводника пропорционален его потенциалу:  $q = C\varphi$ . Коэффициент пропорциональности  $C$  называется *электрической емкостью* или просто *емкостью* проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (4.16)$$

*Конденсатор* представляет собой два разноименно заряженных проводящих тела (обкладки), находящихся на небольшом расстоянии друг от друга. Под *зарядом конденсатора* понимается заряд, расположенный на одной из внутренних, обращенных друг к другу, поверхностей этих обкладок. Заряды обкладок равны по модулю и противоположны по знаку.

*Емкость конденсатора* равна отношению заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (4.17)$$

Емкость конденсатора не зависит от заряда и определяется его формой и размерами. По форме проводящих поверхностей различают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы.

Емкость *плоского* конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \quad (4.18)$$

где  $S$  — площадь поверхности одной пластины (меньшей, если они не равны),  $d$  — расстояние между пластинами,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость материала, находящегося между обкладками (п. 4.1.3°).

Емкость *цилиндрического* конденсатора и коаксиального кабеля

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(b/a)}, \quad (4.19)$$

где  $b$  и  $a$  — радиусы внешнего и внутреннего цилиндров,  $l$  — длина конденсатора.

Емкость *сферического* конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{1/a - 1/b}, \quad (4.20)$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы внутренней и внешней сфер.

Приведенные формулы для цилиндрического и сферического конденсаторов справедливы, когда заземлены внешний цилиндр и внешняя сфера. Когда расстояние между обкладками мало по сравнению с их размерами, выражения (4.19) и (4.20) переходят в формулу (4.18) для емкости плоского конденсатора. Емкость уединенного шара радиуса  $R$  равна  $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ . Емкость земного шара составляет около 700 мкФ.

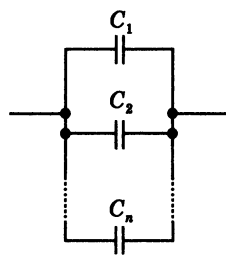


Рис. 4.7.  
Параллельное  
соединение  
конденсаторов

**6°.** При *параллельном* соединении конденсаторов (рис. 4.7) напряжения на них одинаковы, полный заряд равен сумме за-



рядов отдельных конденсаторов. Полная емкость такой батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (4.21)$$

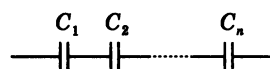


Рис. 4.8.

Последовательное  
соединение  
конденсаторов

При *последовательном* соединении предварительно незаряженных конденсаторов (рис. 4.8) заряды на всех конденсаторах одинаковы, полное напряжение равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах. При последовательном

соединении складываются обратные емкостям величины:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (4.22)$$

При последовательном соединении конденсаторов полная емкость всей системы меньше самой малой емкости включенных в нее конденсаторов.

**7°. Энергию  $W$**  электрического поля конденсатора можно представить либо как потенциальную энергию взаимодействия зарядов, находящихся на обкладках, либо как энергию создаваемого этими зарядами электрического поля, заключенного между обкладками конденсатора:

$$W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}. \quad (4.23)$$

В плоском конденсаторе поле однородно и энергию можно представить в виде

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2V, \quad (4.24)$$

где  $V = Sd$  — объем, занимаемый электрическим полем. Величина

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon E^2$$

имеет смысл *объемной плотности энергии* электрического поля.

Энергия взаимодействия системы  $N$  неподвижных точечных зарядов в вакууме выражается формулой

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (4.25)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме  $i$ -го, в той точке, где находится  $i$ -й заряд:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1 \atop (k \neq i)}^N \frac{q_k}{r_{ik}}, \quad (4.26)$$

$r_{ik}$  — расстояние между  $i$ -м и  $k$ -м зарядами.

Формула (4.25) для энергии системы зарядов справедлива и в том случае, когда наряду с точечными зарядами в систему входят заряженные проводники, причем в слагаемых, соответствующих проводникам,  $q_i$  — полный заряд проводника, а  $\varphi_i$  — его потенциал, создаваемый как другими зарядами, так и его собственным.

*Теорема Ирншоу:* равновесие, в котором может находиться система зарядов при действии только электростатических сил, всегда неустойчиво.

## 4.2. Электрический ток

1°. *Электрический ток* — упорядоченное движение электрических зарядов. За *направление тока* принимают направление движения положительных зарядов. Если ток создается движением отрицательных зарядов, то направление тока считают противоположным направлению их движения. *Постоянный ток* — ток, при котором за любые равные промежутки времени через поперечное сечение проводника проходит одинаковый заряд.

*Силой тока*  $I$  или просто *током* в момент времени  $t$  называется предел (п. М5.3.1°)

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (4.27)$$

где  $\Delta q$  — заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $\Delta t$ . Сила тока — скалярная величина.

*Плотность тока*  $\mathbf{j}$  — векторная величина, связанная с силой тока  $I$ , идущего через плоскую поверхность  $S$ , соотношением

$$I = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{S}), \quad (4.28)$$

где за направление  $\mathbf{S}$  принимается направление нормали к поверхности  $S$ , образующей острый угол с условно выбранным направлением движения положительных зарядов. Плотность тока дается выражением

$$\mathbf{j} = ne\langle \mathbf{v} \rangle, \quad (4.29)$$

где  $e$  — заряд носителя,  $n$  — число носителей в единице объема (концентрация),  $\langle \mathbf{v} \rangle$  — средняя скорость их упорядоченного движения, пропорциональная напряженности поля:  $\langle \mathbf{v} \rangle = u\mathbf{E}$ . Коэффициент пропорциональности  $u$  между  $\langle \mathbf{v} \rangle$  и  $\mathbf{E}$  зависит от механизма рассеяния носителей заряда и называется *подвижностью*. Поэтому

$$\mathbf{j} = neu\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}. \quad (4.30)$$

Величина  $\sigma = neu$ , называемая *удельной проводимостью*, зависит от свойств проводника. Формула (4.30) — это закон Ома в дифференциальной форме.

Напряжение  $U$  между двумя произвольными точками электрической цепи — это разность потенциалов между этими точками. Иногда напряжение на участке цепи называют падением напряжения.

Для участка однородной цепи, где не действуют сторонние силы (п. 4.2.7°), справедлив закон Ома:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (4.31)$$

где  $R$  — сопротивление этого участка цепи.

Проводники, в которых ток обусловлен движением электронов, называют *проводниками первого рода*. К ним относятся металлы. Сопротивление проводника постоянного сечения, выполненного из однородного материала, равно

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (4.32)$$

где  $\rho$  — *удельное сопротивление*, равное сопротивлению проводника единичной длины с поперечным сечением в единицу площади,  $l$  — длина проводника,  $S$  — площадь поперечного сечения проводника. Величины  $\rho$  и  $\sigma$  связаны соотношением

$$\rho = 1/\sigma.$$

Удельное сопротивление  $\rho$ , как и удельная проводимость  $\sigma$ , характеризует свойства материала и не зависит от формы и размеров проводника (при условии, что размеры остаются макроскопическими, см. гл. 3).

С повышением температуры удельное сопротивление большинства металлов увеличивается: приближенно это изменение описывается соотношением

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (4.33)$$

Таблица 4.2

**Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых металлов (при 20 °С)**

Металл	Удельное сопротивление, $10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	Температурный коэффициент сопротивления, $10^{-3} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	0,027	4,3
Никель	0,087	6,5
Вольфрам	0,055	4,1
Платина	0,107	3,9
Золото	0,022	3,9
Ртуть	0,96	0,92
Медь	0,0172	3,8
Серебро	0,016	3,8

где  $\rho$  — удельное сопротивление при температуре  $t$ ,  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  — *температурный коэффициент сопротивления*. Значения удельного сопротивления и температурного коэффициента сопротивления для некоторых металлов приведены в табл. 4.2.

*Сверхпроводимость* — явление скачкообразного обращения в нуль сопротивления некоторых металлов и сплавов при определенных низких температурах.

2°. При *последовательном* соединении сопротивлений (рис. 4.9) общее сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (4.34)$$

В последовательной цепи сила тока одинакова во всех участках цепи, а напряжения на концах отдельных участков пропорциональны сопротивлениям этих участков:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (4.35)$$

Полное напряжение на концах последовательной цепи равно сумме напряжений на отдельных участках:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

При *параллельном* соединении сопротивлений (рис. 4.10) складываются обратные сопротивления величины — *проводимости*:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (4.36)$$

Здесь одинаковы напряжения на отдельных сопротивлениях, а токи в различных неразветвленных участках обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.37)$$

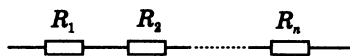


Рис. 4.9.

Последовательное соединение  
сопротивлений

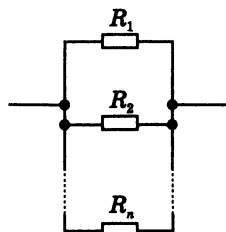


Рис. 4.10.

Параллельное соединение  
сопротивлений

Сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме сил токов в параллельно включенных участках:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

(первое правило Кирхгофа, см. п. 4.2.5°).

3°. Прибор для измерения силы тока называется *амперметром*. Он включается *последовательно* с тем участком цепи, в котором измеряется сила тока. Внутреннее (собственное) сопротивление  $R_a$  амперметра должно быть как можно меньше. Для увеличения диапазона измерений амперметра параллельно амперметру включают *шунтирующее* сопротивление (рис. 4.11, а). Для увеличения диапазона измерений в  $n$  раз требуется сопротивление шунта

$$R_{ш} = \frac{R_a}{n - 1}. \quad (4.38)$$

Прибор для измерения напряжения называется *вольтметром*. Он включается *параллельно* участку цепи, напряжение на котором подлежит измерению. Внутреннее (собственное)

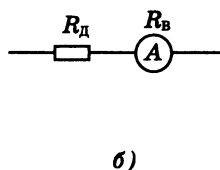
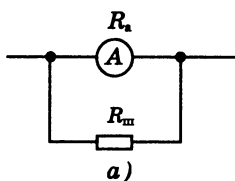


Рис. 4.11.

Шунт (а) и добавочное сопротивление (б)

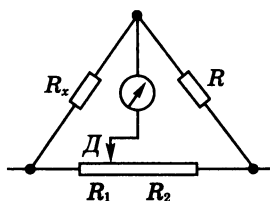


Рис. 4.12.  
Мост Уитстона

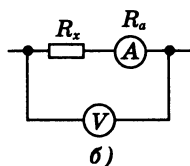
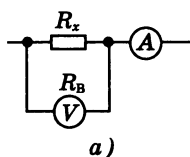


Рис. 4.13.  
Измерение  $R_x$

сопротивление  $R_b$  вольтметра должно быть как можно больше. Для увеличения диапазона измерений вольтметра последовательно с вольтметром включается *добавочное* сопротивление (рис. 4.11, б). Для увеличения диапазона измерений в  $n$  раз требуется добавочное сопротивление

$$R_d = R_b(n - 1). \quad (4.39)$$

Для измерения сопротивлений используется *мост Уитстона* (рис. 4.12). Положение движка  $D$  подбирается таким образом, чтобы ток через гальванометр отсутствовал. В этом случае

$$R_x = R \frac{R_1}{R_2}. \quad (4.40)$$

При измерении сопротивления с помощью вольтметра и амперметра можно воспользоваться любой из схем, показанных на рис. 4.13. В случае использования схемы а) неизвестное сопротивление

$$R_x = \frac{U}{I - U/R_b}, \quad (4.41)$$

где  $U$  и  $I$  — показания вольтметра и амперметра. При использовании схемы б) сопротивление

$$R_x = \frac{U}{I} - R_a. \quad (4.42)$$

Первая схема удобна для измерения сопротивлений, много меньших сопротивления вольтметра  $R_b$ , вторая — для измерения сопротивлений, много больших сопротивления амперметра  $R_a$ . В этих случаях для  $R_x$  с большой точностью справедливо

$$R_x = \frac{U}{I}. \quad (4.43)$$

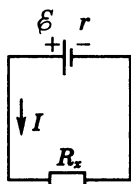


Рис. 4.14.

Неразветвленная замкнутая цепь

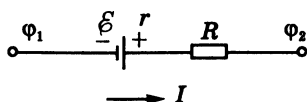


Рис. 4.15.

Участок неоднородной цепи

4°. Для *неразветвленной* замкнутой цепи, содержащей источник тока (п. 4.2.7°) с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (рис. 4.14), закон Ома имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (4.44)$$

Для участка *неоднородной* цепи с сопротивлением  $R$ , в котором действует ЭДС  $\mathcal{E}$  и на концах которого поддерживается напряжение  $U$  (рис. 4.15), закон Ома имеет вид

$$I = \frac{U + \mathcal{E}}{R + r}. \quad (4.45)$$

Здесь  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , а ЭДС  $\mathcal{E}$  берется со знаком плюс, если ее источник включен так, как показано на рис. 4.15, и со знаком минус, если он включен в противоположной полярности. Если вычисляемый по формуле (4.45) ток при выполнении указанных правил окажется отрицательным, то в действительности он имеет противоположное направление.

### Пример

При зарядке аккумулятора, электрическая цепь которого показана на рис. 4.16, сила тока в цепи определяется выражением

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{r + R}. \quad (4.46)$$

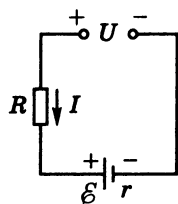


Рис. 4.16.

Зарядка аккумулятора



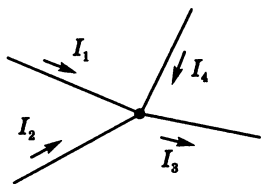


Рис. 4.17.

Первое правило Кирхгофа

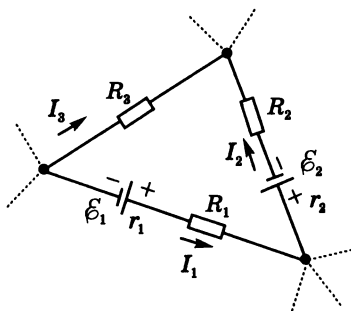


Рис. 4.18.

Второе правило Кирхгофа

5°. *Правила Кирхгофа* используются при расчете токов в *разветвленных* электрических цепях.

*Первое правило Кирхгофа*: алгебраическая сумма сил токов в участках цепи, сходящихся в любом узле, равна нулю. Токи, приходящие к узлу, берутся с одним знаком, а уходящие от узла — с противоположным. Например, для узла, показанного на рис. 4.17, имеем

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0. \quad (4.47)$$

Первое правило Кирхгофа следует из закона сохранения заряда.

*Второе правило Кирхгофа*: для любого замкнутого контура, выделенного в разветвленной цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков равна алгебраической сумме всех ЭДС в этом контуре. При этом с положительными знаками берутся токи, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура; с положительными знаками берутся ЭДС, которые повышают потенциал в направлении обхода контура. Например, для контура, изображенного на рис. 4.18, имеем

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) - I_3R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (4.48)$$

Второе правило Кирхгофа следует из закона Ома (4.45), примененного ко всем участкам выделенного контура.

*Правила расчета разветвленных цепей:*

1) Обозначим на схеме токи во всех неразветвленных участках, произвольно задавая им направление.

2) Запишем уравнения для сумм сил токов во всех узлах, кроме одного, в соответствии с первым правилом Кирхгофа.

3) В соответствии со вторым правилом Кирхгофа запишем уравнения для всех простых контуров, которые можно выделить в данной цепи и которые не получаются наложением уже рассмотренных. (Простым называется контур, при обходе которого мы побываем в каждой точке только по одному разу.) В правильно выбранной системе контуров каждый участок цепи должен фигурировать по крайней мере в одном из контуров.

4) Токи, оказавшиеся отрицательными при решении получившейся системы уравнений, в действительности направлены в противоположную сторону.

**Пример**

Для цепи, показанной на рис. 4.19, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I &= 0, \\ I_1 r_1 + IR &= \mathcal{E}_1, \\ I_2 r_2 + IR &= \mathcal{E}_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

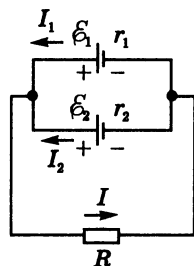


Рис. 4.19.  
Разветвленная цепь

Решая ее, находим (п. М3.5.2°)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}, & I_1 &= \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R + \mathcal{E}_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}, \\ I_2 &= \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)R + \mathcal{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \end{aligned}$$

**6°. Работа  $A$ ,** совершаемая в течение времени  $t$  постоянным током на участке цепи, по которому идет ток  $I$ , а на концах поддерживается напряжение  $U$ , равна

$$A = IUt. \quad (4.50)$$

Развиваемая током *мощность*

$$P = \frac{A}{t} = IU. \quad (4.51)$$

Теплота  $Q$ , выделяющаяся в течение времени  $t$  в проводнике с сопротивлением  $R$  при прохождении постоянного тока  $I$ , определяется *законом Джоуля — Ленца*:

$$Q = I^2 R t. \quad (4.52)$$

Соответственно выделяющаяся в единицу времени теплота (мощность тепловых потерь)

$$P_Q = \frac{Q}{t} = I^2 R. \quad (4.53)$$

В *однородном* участке цепи, где  $\mathcal{E} = 0$  и справедлив закон Ома  $I = U/R$ , имеем

$$A = IUt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = Q. \quad (4.54)$$

В таком участке вся совершаемая током работа реализуется в выделяющейся теплоте.

В *неоднородном* участке цепи, содержащем источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , когда  $I = (U + \mathcal{E})/(R + r)$  (п. 4.2.4°), для совершаемой током работы  $A$ , работы источника  $A_{\text{ист.}}$  и выделяющейся теплоты  $Q$  имеем

$$\begin{aligned} A &= IUt = \frac{U + \mathcal{E}}{R + r} Ut, & A_{\text{ист.}} &= I\mathcal{E}t, \\ Q &= I^2(R + r)t = I(U + \mathcal{E})t = \frac{(U + \mathcal{E})^2}{R + r} t. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Выделяющаяся теплота равна сумме работы тока и работы источника:

$$Q = A + A_{\text{ист.}}$$

### Пример

При зарядке аккумулятора (рис. 4.16) мощность, развиваемая зарядным устройством, равна

$$P = IU. \quad (4.56)$$

Выделяющаяся в единицу времени в аккумуляторе и подводящих проводах теплота

$$P_Q = I^2(R + r). \quad (4.57)$$

Идущая на зарядку аккумулятора мощность

$$P_{\text{зар.}} = I\mathcal{E}. \quad (4.58)$$

В соответствии с законом сохранения энергии очевидно, что  $P = P_Q + P_{\text{зар.}}$ .

**7°. Источник** (генератор) *электрического тока* — устройство, поддерживающее разность потенциалов на концах электрической цепи. Это происходит за счет работы *сторонних сил*, т. е. сил *неэлектростатической* природы. *Электродвижущей силой* (ЭДС) источника называется величина, равная отношению работы сторонних сил  $A_{\text{стор.}}$  при перемещении по цепи заряда  $q$  к этому заряду:

$$\mathcal{E} = A_{\text{стор.}}/q.$$

Электрическое сопротивление  $r$  источника тока называется *внутренним сопротивлением*. Клеммы источника, к которым подключается нагрузка (т. е. потребитель энергии), называются *полюсами*.

ЭДС источника равна напряжению на разомкнутых полюсах источника. При замкнутой внешней цепи ЭДС равна сумме напряжений во внешней цепи и внутри источника:

$$\mathcal{E} = U_{\text{внеш.}} + U_{\text{внут.}} = IR + Ir.$$

Полная развиваемая источником тока мощность (рис. 4.14)

$$P = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}. \quad (4.59)$$

Полезная мощность, т. е. мощность, выделяющаяся во внешней цепи на нагрузке  $R$ , равна

$$P_{\text{пол.}} = IU = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}. \quad (4.60)$$

КПД источника

$$\eta = \frac{P_{\text{пол.}}}{P} = \frac{R}{R_1 + r}. \quad (4.61)$$

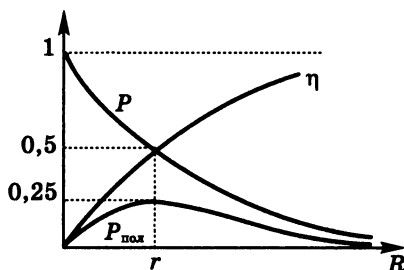


Рис. 4.20.

К исследованию работы  
источника тока

Условия работы источника тока иллюстрируются графиками на рис. 4.20.

Максимальная полезная мощность, которую можно получить от данного источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , равна (п. М5.4.30°)

$$P_{\text{пол.}}^{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \quad (4.62)$$

и достигается при сопротивлении нагрузки  $R$ , равном внутреннему сопротивлению источника  $r$ :  $R = r$ , а КПД при этом равен 50%:  $\eta = 1/2$ .

Любую мощность  $P_{\text{пол.}}$  на нагрузке, меньшую максимальной, можно получить при двух различных значениях сопротивления нагрузки:

$$R_{1,2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2P_{\text{пол.}}} - r \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{P_{\text{пол.}}} \left( \frac{\mathcal{E}^2}{4P_{\text{пол.}}} - r \right)}, \quad (4.63)$$

причем  $R_1 > r$ ,  $R_2 < r$ . В первом случае  $\eta > 1/2$ , во втором —  $\eta < 1/2$ .

Величина  $I_0 = \mathcal{E}/r$  — называется *током короткого замыкания* источника тока. Последовательное подключение источника в цепь, содержащую другие источники тока, целесообразно только в том случае, когда ток его короткого замыкания больше тока в цепи, существующего до подключения этого источника. В противном случае выделяющаяся внутри источника в единицу времени теплота будет больше, чем развиваемая им мощность.

8°. *Электролиты — проводники второго рода.* К ним относятся растворы кислот, щелочей и солей в воде и дру-

гих растворителях. Электрической проводимостью обладают и расплавленные соли. Носителями зарядов являются положительно и отрицательно заряженные *ионы* и *электроны*. Электрод, соединенный с положительным полюсом источника тока, называется *анодом*, с отрицательным — *катодом*. Положительные ионы (*катионы*) движутся к катоду, отрицательные ионы (*анионы*) и электроны движутся к аноду.

*Электролиз* — изменения химического состава электролита (раствора, в котором произошла диссоциация молекул на ионы) и выделение различных продуктов на электродах при прохождении тока.

*Первый закон Фарадея*: масса вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна прошедшему через электролит заряду:

$$m = kq = kIt, \quad (4.64)$$

где  $k$  — *электрохимический эквивалент* вещества.

*Второй закон Фарадея*: электрохимический эквивалент вещества пропорционален его *химическому эквиваленту*  $M/n$  ( $M$  — молярная масса,  $n$  — валентность вещества):

$$k = \frac{1}{F} \frac{M}{n}, \quad (4.65)$$

где постоянная Фарадея  $F$  — заряд, необходимый для выделения на электроде одного моля вещества:

$$F = N_A e = 96\,485,309 \text{ Кл/моль}.$$

Объединенная запись первого и второго законов Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} q = \frac{1}{F} \frac{M}{n} It. \quad (4.66)$$

### 4.3. Магнитное поле

1°. *Магнитное поле* создается постоянными магнитами и движущимися электрическими зарядами (электрическими

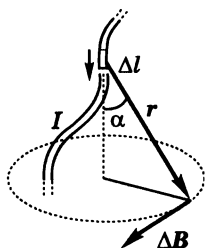


Рис. 4.21.  
Магнитное поле  
элемента провода  
с током

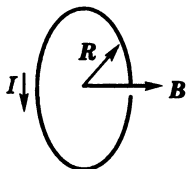


Рис. 4.22.  
Магнитное поле  
в центре кругового  
тока

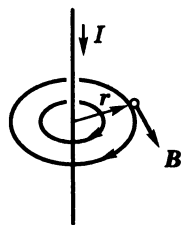


Рис. 4.23.  
Магнитное поле  
прямолинейного  
проводника

токами). Магнитное поле проявляется в действии на магнитную стрелку (постоянный магнит), проводник или рамку с электрическим током, движущийся заряд. Магнитное поле является *соленоидальным* (вихревым), его линии индукции всегда замкнуты: не существует источников поля — магнитных зарядов.

Силовой характеристикой магнитного поля является *индукция*  $B$ . Как и электрическое поле, магнитное удовлетворяет принципу суперпозиции. Измерить на опыте можно только суммарную индукцию магнитного поля, создаваемую всеми элементами электрического тока.

**Закон Био — Савара — Лапласа:** элемент провода  $\Delta l$ , по которому идет ток  $I$ , создает в вакууме в некоторой точке магнитное поле, индукция которого

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}, \quad (4.67)$$

где  $\mu_0 = 12,566370614 \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  — *магнитная постоянная*,  $r$  — расстояние от элемента тока до точки наблюдения,  $\alpha$  — угол между направлением на точку наблюдения и направлением элемента тока  $\Delta l$  (рис. 4.21).

Вектор  $\Delta B$  перпендикулярен плоскости, содержащей элемент тока  $\Delta l$  и радиус-вектор  $r$ . Направление  $\Delta B$  определяется *правилом правого винта*: оно совпадает с направлением вращения головки винта при его поступательном перемещении

вдоль тока. С помощью векторного произведения можно записать (§ М8.2)

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l}{r^3} (\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}). \quad (4.68)$$

Для индукции магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью  $\mu$  (см. п. 4.3.4°) в формулах (4.67) и (4.68) добавляется множитель  $\mu$ . Вектор  $\Delta \mathbf{l}$  направлен вдоль провода в направлении движения положительных зарядов.

Магнитная индукция в центре витка радиуса  $R$  с током  $I$  (рис. 4.22):

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R} \quad \left( B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R} \right). \quad (4.69)$$

Магнитная индукция на расстоянии  $r$  от прямолинейного проводника с током  $I$  (рис. 4.23):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \left( B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} \right). \quad (4.70)$$

Внутри относительно длинной цилиндрической катушки (соленоида) длиной  $l$  и с числом витков  $N$ , по которой течет ток  $I$ , магнитное поле однородно:

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l} \quad \left( B = \mu_0 \mu \frac{IN}{l} \right). \quad (4.71)$$

**2°.** Сила, действующая на элемент  $\Delta \mathbf{l}$  проводника с током, помещенного в магнитное поле, определяется *законом Ампера*:

$$\Delta \mathbf{F} = I (\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (4.72)$$

Модуль силы Ампера  $\Delta F$  равен

$$\Delta F = I \cdot \Delta l B \sin \alpha, \quad (4.73)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями индукции  $\mathbf{B}$  и элемента  $\Delta \mathbf{l}$  проводника с током. Направление силы, действующей на проводник с током, определяется векторным произведением (§ М8.2) или *правилом левой руки*: если расположить левую руку так, чтобы линии индукции магнитного поля вхо-



дили в ладонь, а вытянутые пальцы указывали направление тока, то отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей на проводник (рис. 4.24).

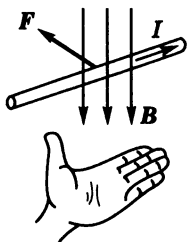


Рис. 4.24.  
Правило  
левой руки

Два длинных прямолинейных параллельных проводника с токами притягиваются друг к другу, если токи направлены одинаково, и отталкиваются, если токи направлены в противоположные стороны. Сила взаимодействия между ними

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi d}, \quad (4.74)$$

где  $d$  — расстояние между проводниками,  $l$  — их длина,  $I_1$  и  $I_2$  — токи в них,  $\mu$  — магнитная проницаемость среды, в которой находятся проводники (п. 4.3.4°).

На движущийся в магнитном поле заряд  $q$  действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad F = qvB \sin \alpha, \quad (4.75)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями скорости  $\mathbf{v}$  и индукции  $\mathbf{B}$ . Направление силы Лоренца определяется векторным произведением (§ М8.2) или правилом левой руки.

### Пример

Заряженная частица массы  $m$ , влетающая в однородное магнитное поле со скоростью  $v$ , перпендикулярной линиям индукции магнитного поля, движется по круговой траектории радиуса  $R = mv/(qB)$ , причем период обращения  $T$  не зависит от скорости:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Это свойство движения в магнитном поле используется в *циклотроне* — приборе для ускорения заряженных частиц.

3°. В пространстве, где имеется магнитное поле, распределена энергия. Энергия  $W$  магнитного поля, создаваемого проводником с индуктивностью  $L$  (п. 4.4.2°), по которому идет ток  $I$ , равна

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (4.76)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля определяется выражением

$$w = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}. \quad (4.77)$$

4°. Во всех телах, помещенных в магнитное поле, происходит намагничивание — возникает магнитный момент. Намагниченное тело называется магнетиком. Магнитная проницаемость  $\mu$  показывает, во сколько раз увеличивается ( $\mu > 1$ ) или уменьшается ( $\mu < 1$ ) магнитная индукция в веществе по сравнению с ее значением в вакууме (при тех же значениях токов, создающих поле).

Вещества с  $\mu \gg 1$  (железо, кобальт, никель, некоторые сплавы) называются ферромагнетиками. Магнитное поле в них усиливается во много раз. Для каждого ферромагнетика существует характерная температура — точка Кюри, выше которой он превращается в парамагнетик. Парамагнетиками называются вещества с  $\mu \geq 1$  (алюминий, платина, воздух). Вещества с  $\mu < 1$  называются диамагнетиками (медь, серебро, висмут). В неоднородном магнитном поле парамагнетик втягивается в область сильного поля, а диамагнетик выталкивается из нее.

Диамагнетизм вещества — это индукционный эффект, определяемый индуцированными магнитным полем орбитальными токами. В металлах он определяется квантованием движения свободных электронов в магнитном поле. Диамагнетизм — общее свойство всех веществ, но наиболее ярко проявляется в таких веществах, где атомы (или ионы) не обладают собственным магнитным моментом. Парамагнетизм и ферромагнетизм вещества, как правило, связаны с наличием у электронов собственных (т. е. не связанных с орбитальным дви-

жением) магнитных моментов. В кристаллах ферромагнитных веществ оказывается энергетически выгодной параллельная ориентация магнитных моментов электронов и образуются намагниченные области протяженностью  $10^{-2}$ – $10^{-4}$  см — *домены*. В разных доменах магнитное поле ориентировано по-разному, но при наложении внешнего магнитного поля происходит упорядочивание полей отдельных доменов.

#### 4.4. Электромагнитная индукция

1°. *Магнитный поток*  $\Phi$  через поверхность  $S$ , ограниченную плоским контуром, в однородном магнитном поле — это скалярное произведение (п. М8.1.4°)

$$\Phi = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = BS \cos \alpha, \quad (4.78)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением индукции  $\mathbf{B}$  и нормалью к поверхности площадки  $\mathbf{S}$ .

Изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает *вихревое электрическое поле* — электрическое поле с замкнутыми линиями напряженности. В проводнике наведенное вихревое поле проявляется как действие *сторонних сил* (п. 4.2.7°). Это явление называется *электромагнитной индукцией*.

*Закон Фарадея*: в любом замкнутом контуре при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает ЭДС индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E} = -k \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (4.79)$$

В СИ коэффициент  $k = 1$  (п. 1.2.5°). В проводящем контуре ЭДС индукции приводит к появлению индукционного тока. Знак минус соответствует *правилу Ленца*: направление индукционного тока таково, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

Иную физическую природу имеет ЭДС, возникающая при движении проводника в неизменном магнитном поле. Вихре-

вое электрическое поле в этом случае отсутствует, а сторонняя сила представляет собой *силу Лоренца*, с которой магнитное поле действует на движущиеся вместе с проводником заряды. Значение ЭДС по-прежнему определяется формулой (4.79), которая для проводника длиной  $l$ , движущегося со скоростью  $v$  перпендикулярно линиям индукции  $\mathbf{B}$ , дает

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv. \quad (4.80)$$

Направление индукционного тока в этом случае, в соответствии с правилом Ленца, можно определять по *правилу правой руки*: если расположить правую руку так, чтобы линии индукции магнитного поля входили в ладонь, а отогнутый большой палец указывал направление движения проводника, то вытянутые пальцы укажут направление тока.

Таким образом, формула (4.79) представляет собой только правило для нахождения ЭДС индукции, так как она не вскрывает физической причины ее возникновения. Из этого правила бывают исключения (например, *униполярный индуктор*, показанный на рис. 4.25). При повороте рамки изменения магнитного потока через контур  $ABCD$  не происходит, но индукционный ток возникает.

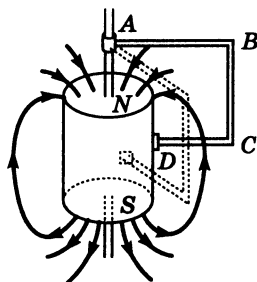


Рис. 4.25.  
Униполярный индуктор

2°. При любом изменении тока в проводнике возникает ЭДС индукции, которая возбуждается изменением магнитного потока, создаваемого этим же током. Такое явление называется *самоиндукцией*. ЭДС самоиндукции определяется выражением (4.79), которое в этом случае записывается в виде

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (4.81)$$

где  $L$  — *индуктивность* проводника, зависящая от его размеров и формы и от свойств среды, в которой находится проводник. Индуктивность  $L$  связывает магнитный поток  $\Phi$ , прони-

зывающий контур, с силой тока  $I$  в контуре, создающего этот поток:

$$\Phi = LI.$$

Индуктивность длинного соленоида с сердечником (при условии, что отношение длины катушки к диаметру катушки больше десяти) приближенно равна

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (4.82)$$

где  $N$  — число витков,  $S$  — площадь поперечного сечения соленоида,  $l$  — длина катушки,  $n = N/l$  — число витков на единицу длины,  $V = Sl$  — объем соленоида.

#### 4.5. Переменный электрический ток

1°. Физические процессы, происходящие в цепях *синусоидального переменного тока*, представляют собой установившиеся вынужденные *электромагнитные колебания* (п. 5.4.2°).

Далее рассматриваются различные цепи переменного тока, к концам которых прикладывается напряжение

$$U = U_0 \cos \omega t. \quad (4.83)$$

При включении обычного *омического (активного)* сопротивления  $R$  (рис. 4.26) ток в цепи

$$I(t) = I_0 \cos \omega t, \quad I_0 = U_0/R. \quad (4.84)$$

Ток изменяется в фазе с приложенным напряжением.

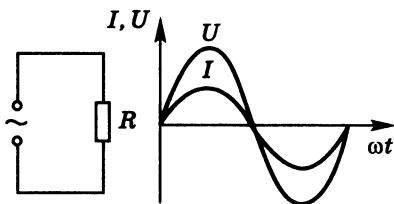


Рис. 4.26.

Напряжение и ток  
с активным сопротивлением

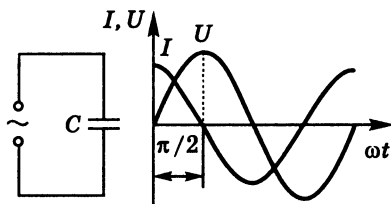
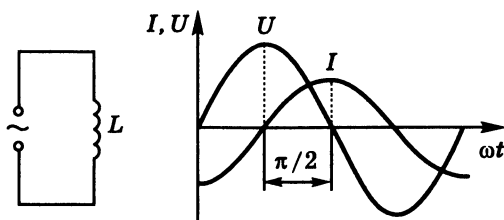


Рис. 4.27.

Напряжение и ток  
в конденсаторе

Рис. 4.28.  
Напряжение и ток  
в катушке  
индуктивности



При включении конденсатора с емкостью  $C$  (рис. 4.27) ток в цепи

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \pi/2), \quad I_0 = U_0 C \omega. \quad (4.85)$$

Ток опережает по фазе напряжение на  $\pi/2$ . Конденсатору с емкостью  $C$  сопоставляется *емкостное (реактивное)* сопротивление  $R_C = 1/(\omega C)$ .

При включении катушки с индуктивностью  $L$  (рис. 4.28) ток в цепи

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2), \quad I_0 = U_0 / (L \omega). \quad (4.86)$$

Ток отстает по фазе от напряжения на  $\pi/2$ . Катушке с индуктивностью  $L$  сопоставляется *индуктивное (реактивное)* сопротивление  $R_L = L \omega$ .

2°. В *последовательной* цепи переменного тока, содержащей активное сопротивление  $R$ , емкость  $C$  и индуктивность  $L$ , сила тока  $I$  в каждый момент времени во всех участках цепи одинакова (рис. 4.29, а), а сумма мгновенных значений напря-

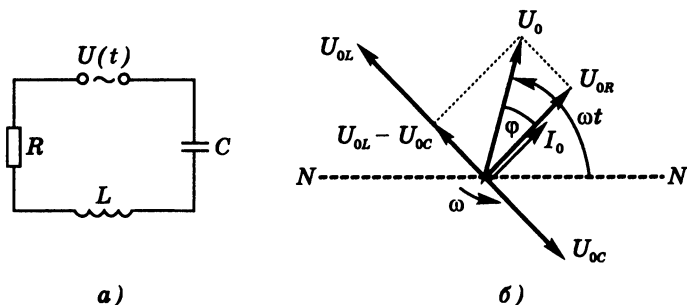


Рис. 4.29.

Последовательная  $RLC$ -цепь (а) и ее векторная диаграмма (б)

жений  $U_R$ ,  $U_C$  и  $U_L$  равна значению приложенного напряжения  $U$  в тот же момент времени:

$$U = U_R + U_C + U_L. \quad (4.87)$$

Соотношения между токами и напряжениями на различных нагрузках удобно находить с помощью векторных диаграмм (п. 5.4.2°). Каждой величине, меняющейся по синусоидальному закону, сопоставляется вектор, длина которого равна амплитудному значению соответствующей величины, а углы между различными векторами равны фазовым сдвигам между соответствующими величинами. Вся система векторов вращается как целое с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Мгновенные значения величин  $I$ ,  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  получаются проецированием соответствующих векторов на заранее выбранное направление  $NN$ .

На рис. 4.29, б показана векторная диаграмма, соответствующая рассматриваемой последовательной цепи. В силу равенства (4.87) вектор, соответствующий приложенному напряжению  $U$ , равен сумме векторов  $U_{0R}$ ,  $U_{0L}$  и  $U_{0C}$ , соответствующих напряжениям на отдельных нагрузках. Приложенное напряжение  $U$  и ток в цепи  $I$  записываются в виде

$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi). \quad (4.88)$$

Величины  $I_0$  и  $\varphi$  определяются с помощью векторной диаграммы:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(\omega C))^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - 1/(\omega C)}{R} \quad (4.89)$$

(рис. 4.29, б). Связь между амплитудным значением тока и амплитудными значениями напряжений на отдельных элементах цепи:

$$U_{0R} = I_0 R, \quad U_{0C} = I_0 / (\omega C), \quad U_{0L} = I_0 L \omega. \quad (4.90)$$

Мгновенные значения напряжений на отдельных элементах цепи:

$$\begin{aligned} U_R &= I_0 R \cos(\omega t - \varphi), \\ U_L &= I_0 L \omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \\ U_C &= \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

3°. При *параллельном* соединении активного сопротивления  $R$  и реактивных сопротивлений  $R_L$  и  $R_C$  (рис. 4.30, а) мгновенное значение тока в неразветвленной части цепи равно алгебраической сумме токов в параллельных участках:

$$I = I_R + I_C + I_L, \quad (4.92)$$

а мгновенное значение напряжения одно и то же на всех участках. Векторная диаграмма для этого случая показана на рис. 4.30, б.

Приложенное напряжение  $U$  и ток в цепи  $I$  определяются выражениями

$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.93)$$

где

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - \omega C\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = R \left(\frac{1}{L\omega} - \omega C\right). \quad (4.94)$$

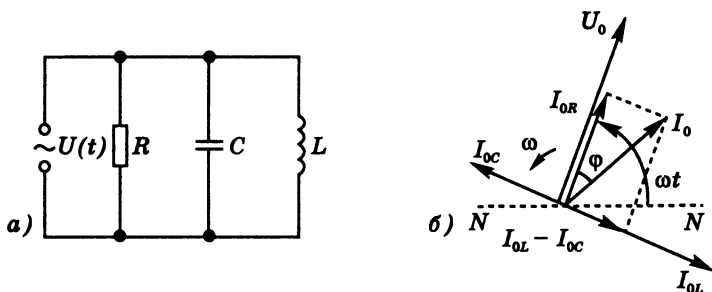


Рис. 4.30.

Параллельная  $RLC$ -цепь (а) и ее векторная диаграмма (б)



Амплитудные значения токов и напряжения связаны соотношениями

$$U_0 = I_{0R}R = I_{0C}\frac{1}{\omega C} = I_{0L}L\omega. \quad (4.95)$$

Мгновенные значения токов в отдельных ветвях цепи:

$$I_R = \frac{U_0}{R} \cos \omega t, \\ I_L = \frac{U_0}{L\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad I_C = U_0 C \omega \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.96)$$

Векторные диаграммы могут быть нарисованы при любых способах включения нагрузок  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

4°. Задав положение векторов, сопоставляемых на векторных диаграммах токам и напряжениям, с помощью комплексных чисел (п. М7.3.1°):

$$\tilde{U} = U_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t), \\ \tilde{I} = I_0 [\cos (\omega t - \varphi) + i \sin (\omega t - \varphi)], \quad (4.97)$$

можно записать закон Ома для участка цепи переменного тока в виде

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{Z}, \quad (4.98)$$

где  $Z = Z_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  — некоторое постоянное для данной цепи комплексное число, называемое *комплексным сопротивлением* или *импедансом* цепи.

Для нахождения импеданса  $Z$  цепи переменного тока следует сопоставить элементам схемы  $R$ ,  $L$  и  $C$  *комплексные сопротивления* переменному току по следующему правилу:

$$R \rightarrow X_R = R, \quad L \rightarrow X_L = iL\omega, \quad C \rightarrow X_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (4.99)$$

Далее следует сложить эти сопротивления по правилам сложения сопротивлений в цепях постоянного тока, используя правила действий с комплексными числами (§ М7.2). Приводя получившееся выражение для импеданса к виду

$$Z = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z, \quad (4.100)$$

получаем формулы для амплитудного значения  $I_0$  тока в цепи и сдвига фазы  $\varphi$  между напряжением и током:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}. \quad (4.101)$$

### Примеры

1) Для последовательной цепи, изображенной на рис. 4.29, а, имеем

$$Z = R + iL\omega + \frac{1}{i\omega C} = R + i \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (4.102)$$

Отсюда с помощью (4.101) получаем (§ M7.2)

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(\omega C))^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - 1/(\omega C)}{R}, \quad (4.103)$$

что совпадает с формулами (4.89).

2) Для параллельной цепи, изображенной на рис. 4.30, а, имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{iL\omega} + i\omega C, \quad (4.104)$$

откуда, приводя к виду (4.100), находим

$$Z = \frac{L^2\omega^2 R + iL\omega R^2(1 - \omega^2 LC)}{L^2\omega^2 + R^2(1 - \omega^2 LC)^2}. \quad (4.105)$$

Используя соотношения (4.101), получаем формулы (4.94).

5°. *Резонанс напряжений* реализуется в *последовательной* цепи переменного тока (рис. 4.29, а) при условии  $\omega^2 = 1/(LC)$ . Амплитудное значение силы тока при резонансе достигает максимума, равного  $U_0/R$ , сдвиг фаз между напряжением и током отсутствует. Напряжения  $U_L$  на индуктивности  $L$  и  $U_C$  на емкости  $C$  равны по модулю и находятся в противофазе, так что полное напряжение на концах цепи  $U$  совпадает с напряжением  $U_R$  на активном сопротивлении  $R$ . Напряжения на реактивных сопротивлениях могут по амплитуде значительно превышать приложенное напряжение.

*Резонанс токов* реализуется в *параллельной* цепи переменного тока, содержащей индуктивность  $L$  и емкость  $C$  (т. е. при стремлении к бесконечности активного сопротивления  $R$  в цепи, изображенной на рис. 4.30, а), при выполнении условия  $\omega^2 = 1/(LC)$ . При резонансе сила тока в неразветвленной части цепи стремится к нулю, в то время как весьма большие по амплитудному значению токи  $I_L$  и  $I_C$  находятся в противофазе друг с другом.

**6°. Мгновенная мощность** в цепи переменного тока

$$P(t) = IU = U_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi). \quad (4.106)$$

Используя тригонометрическую формулу для произведения косинусов двух углов (п. М4.2.2°), получаем

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (4.107)$$

Среднее значение второго слагаемого в квадратных скобках за период  $T = 2\pi/\omega$  равно нулю. Поэтому при вычислении работы за время  $t \gg T$  можно пренебречь вкладом этого слагаемого.

В этом случае имеем

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi, \quad (4.108)$$

$$A = Pt = \left( \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi \right) t. \quad (4.109)$$

Вводя *действующие* значения напряжения и тока  $U = U_0/\sqrt{2}$  и  $I = I_0/\sqrt{2}$ , перепишем выражение для мощности  $P$  в виде

$$P = UI \cos \varphi. \quad (4.110)$$

**7°. Трансформатор** используется для преобразования напряжения (рис. 4.31). Его действие основано на явлении электромагнитной индукции. Если магнитный поток, создаваемый током первичной обмотки, целиком пронизывает вторичную обмотку, то отношение ЭДС в первичной и вторичной обмотках равно отношению чисел витков в них:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.111)$$

При разомкнутой вторичной обмотке напряжение на ней равно индуцируемой в ней ЭДС:

$$U_2 = \mathcal{E}_2. \quad (4.112)$$

Если в первичной обмотке индуктивное сопротивление  $L\omega$  значительно превышает ее активное сопротивление  $R$  ( $L\omega \gg R$ ), то напряжение  $U_1$  на ней близко к напряжению  $U_L$  на индуктивности  $L$ , равному  $U_L = -\mathcal{E}_1$ . Поэтому в таком трансформаторе на холостом ходу

$$U_2 = -\frac{n_2}{n_1}U_1. \quad (4.113)$$

Знак минус означает, что эти напряжения находятся в противофазе. Благодаря большому индуктивному сопротивлению первичной обмотки ток в ней при разомкнутой вторичной цепи мал.

При замыкании вторичной цепи трансформатора во вторичной обмотке появляется ток. По правилу Ленца создаваемый этим током магнитный поток препятствует изменению магнитного потока, создаваемого током в первичной обмотке, что эквивалентно уменьшению индуктивности первичной обмотки. В результате ток в первичной обмотке увеличивается, а сдвиг по фазе между током и напряжением уменьшается — потребляемая от внешней цепи мощность растет. Первичная обмотка трансформатора, представляющая собой на холостом ходу почти чисто индуктивное сопротивление, при увеличении нагрузки становится все ближе к активному сопротивлению.

Если потери энергии в трансформаторе, связанные с выделением теплоты в обмотках, с токами Фуко в сердечнике, с работой перемагничивания, обусловленной гистерезисом, и с рассеянием магнитного потока, малы, то потребляемая трансформатором мощность целиком передается нагрузке:

$$\frac{1}{2}U_1I_1 \cos \varphi_1 = \frac{1}{2}U_2I_2 \cos \varphi_2, \quad (4.114)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — сдвиги фаз между током и напряжением в первичной и вторичной цепях.

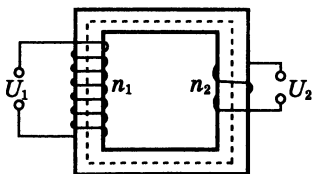


Рис. 4.31.

Трансформатор

## 4.6. Электромагнитное поле

1°. Электрическое и магнитное поля имеют относительный характер. Заряд, неподвижный в какой-либо одной системе отсчета, относительно других систем отсчета движется. Такой движущийся заряд подобен электрическому току и создает магнитное поле. Таким образом, если в какой-либо системе отсчета присутствует только электрическое поле, то в любой другой системе будет еще и магнитное.

Согласно *принципу относительности* (§ 7.1) все инерциальные системы отсчета равноправны и физические законы имеют в них одинаковый вид. Поэтому, вследствие относительного характера электрического и магнитного полей, следует рассматривать эти поля совместно, как единое электромагнитное поле. При малой относительной скорости систем отсчета ( $v \ll c$ ) формулы преобразования полей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой имеют вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (4.115)$$

Здесь  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  ( $c$  — скорость света в вакууме).

2°. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой существуют две *инвариантные*, т. е. не меняющие своего значения, комбинации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , причем это верно при любой относительной скорости инерциальных систем:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}', \quad E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2. \quad (4.116)$$

Если в какой-либо инерциальной системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то они будут взаимно перпендикулярны и во всякой другой системе. Для таких взаимно ортогональных полей можно найти такую систему отсчета, в которой либо  $\mathbf{B} = 0$ , либо  $\mathbf{E} = 0$ , смотря по тому, положителен или отрицателен инвариант  $E^2 - c^2 B^2$ .

Для взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей бегущей электромагнитной волны (п. 5.7.12°) выполняется соотношение  $E = cB$ , т. е. оба инварианта (4.115) равны нулю. Поэтому соотношение  $E = cB$ , как и ортогональность

векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в одной и той же пространственно-временной точке, справедливо сразу во всех инерциальных системах отсчета.

Между электрическими и магнитными явлениями существует определенная симметрия: изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле; и наоборот, изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное поле. Последнее свойство теоретически предсказал Максвелл — только при этом условии может выполняться закон сохранения электрического заряда.

**3°. Основы теории электромагнитного поля** были сформулированы Максвеллом на основе обобщения имевшихся экспериментальных данных. В системе уравнений Максвелла содержатся все открытые экспериментально законы электромагнетизма. На основе анализа этих уравнений Максвелл предсказал возможность существования связанных между собой электрического и магнитного полей, распространяющихся в пространстве со скоростью света, — *электромагнитных волн* (п. 5.7.12°), которые позднее были экспериментально обнаружены Герцем.

Система уравнений Максвелла содержит четыре основных закона электромагнетизма. Первый из них — это закон взаимодействия электрических зарядов — закон Кулона (п. 4.1.10°), — который можно сформулировать иначе в виде так называемой теоремы Гаусса. Для формулировки этой теоремы вводится *поток вектора напряженности* электрического поля  $\mathbf{E}$  через элемент поверхности  $\Delta S$  как произведение  $E_n \Delta S$ , где  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на направление нормали  $\mathbf{n}$  к площадке  $\Delta S$ . Поток напряженности через произвольную поверхность определяется как алгебраическая сумма потоков через ее элементы. Физический смысл потока  $N$  — число линий напряженности электрического поля, пересекающих поверхность, если считать, что «густота» (т. е. число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной площади) равна модулю напряженности в этом месте.

*Теорема (закон) Гаусса:* поток  $N$  вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален полному заряду  $q$ , находящемуся внутри этой поверхности:

$$N = q/\varepsilon_0.$$

Это значит, что из каждого положительного заряда  $q$  исходит  $q/\varepsilon_0$  линий напряженности, а на каждом отрицательном заряде  $q$  оканчивается  $|q|/\varepsilon_0$  линий напряженности.

Второй закон — *теорема Гаусса для магнитного поля*, согласно которой поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Эта теорема отражает отсутствие в природе магнитных зарядов и говорит о вихревом характере магнитного поля: линии индукции магнитного поля представляют собой замкнутые кривые.

Третий закон — *закон электромагнитной индукции Фарадея*, согласно которому изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле (п. 4.4.1°).

*Четвертый закон* является обобщением закона Био — Савара — Лапласа: магнитное поле может создаваться как движущимися электрическими зарядами (токами), так и изменяющимся электрическим полем.

Уравнения Максвелла удовлетворяют принципу относительности (7.1) и не меняют своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

## 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

К *колебаниям* относят движения или процессы, в той или иной степени повторяющиеся с течением времени. Колебания в физических системах почти всегда связаны с попеременными превращениями энергии из одного вида в другой и обратно. По характеру физических процессов колебания разделяются на *механические*, *электромагнитные* и их комбинации (как, например, колебания в плазме). Колебаниям различной физической природы присущи общие закономерности, изучение которых составляет предмет теории колебаний.

### 5.1. Классификация колебаний

1°. *Кинематически*, т. е. по характеру зависимости от времени некоторой физической величины  $x(t)$ , различают *периодические* (п. М2.3.5°) колебания (рис. 5.1, а–в), при которых любое значение  $x(t)$  повторяется через одинаковые промежутки времени  $T$ , называемые периодом колебаний:

$$x(t + T) = x(t).$$

Величина, обратная периоду  $T$  и равная числу колебаний в единицу времени, называется *частотой* колебаний:

$$\nu = 1/T.$$

Частота  $\nu$  измеряется в *герцах* (Гц). При частоте 1 Гц совершается одно полное колебание за 1 с. Наиболее важная разновидность периодических колебаний — *синусоидальные* или *гармонические колебания* (рис. 5.1, а).

Среди *непериодических* колебаний (рис. 5.1, г–е) наиболее важны почти синусоидальные, для которых характерно медленное изменение амплитуды (рис. 5.1, г, д), фазы или частоты (рис. 5.1, е). В случае медленного изменения амплитуды периодом условно считают промежуток времени между последовательными прохождением колеблющейся величины через нуль в одном направлении. Модуляцию высокочастотной (несущей) электромагнитной волны колебаниями низкой (звуковой) частоты используют в радиосвязи.

2°. По *способу возбуждения* колебания делят на: *свободные* или *собственные*, происходящие после какого-либо первоначального воздействия в предоставленной самой себе системе; *вынужденные*, происходящие при периодическом внешнем воздействии; *параметрические*, происходящие при периодическом изменении какого-либо параметра колебательной системы (длины маятника, емкости или индуктивности контура и т. п.); *автоколебания*, происходящие в системах, способных регулировать поступление энергии постоянного источника для компенсации потерь.



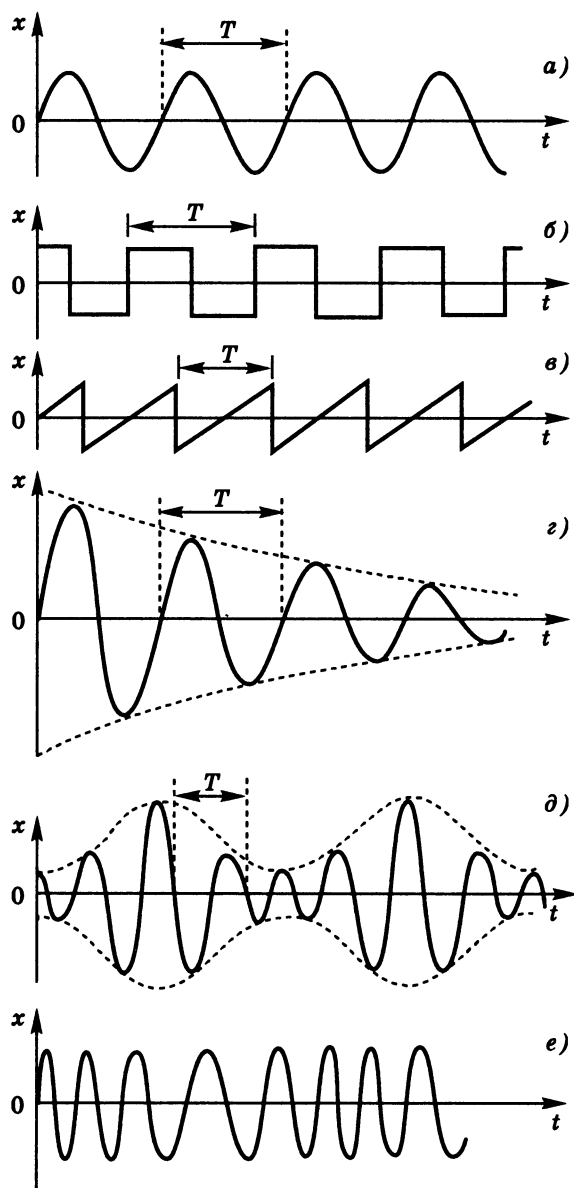


Рис. 5.1.

Колебания разной формы: *a* — синусоидальные (гармонические);  
*б* — прямоугольные; *в* — пилообразные; *г* — затухающие;  
*д* — амплитудно-модулированные; *е* — частотно-модулированные

**3°.** Колебательные системы по сложности делят на: простые системы (с одной степенью свободы), характеризующиеся единственной собственной частотой; системы с сосредоточенными параметрами (с конечным числом степеней свободы), имеющие набор собственных частот (частот нормальных колебаний), число которых совпадает с числом степеней свободы; системы с распределенными параметрами, имеющие бесконечный набор собственных частот.

## 5.2. Гармонические колебания

**1°.** Гармонические колебания описываются функцией вида

$$x(t) = A \cos \varphi(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.1)$$

или

$$x(t) = A \cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\varphi(t)$  — фаза,  $\varphi_0$  — значение фазы при  $t = 0$  (начальная фаза),  $\omega = 2\pi\nu$  — круговая (или циклическая) частота, измеряемая в секундах в минус первой степени (угловая скорость  $\omega$  — в радианах в секунду, см. п. 2.1.5°). Если  $x(t)$  — координата тела, совершающего гармонические колебания, то его скорость  $v_x(t) = dx/dt = \dot{x}$  и ускорение  $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$  изменяются со временем тоже по гармоническому закону:

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (5.2)$$

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.3)$$

т. е. колебания скорости опережают колебания координаты по фазе на  $\pi/2$  (на четверть периода), а колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями координаты. Графики  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  приведены на рис. 5.2.

**2°.** Наглядное представление кинематических характеристик гармонических колебаний можно получить, рассматривая их связь с равномерным движением точки по окружности (рис. 5.3). Радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , модуль которого равен  $A$ , вращает-

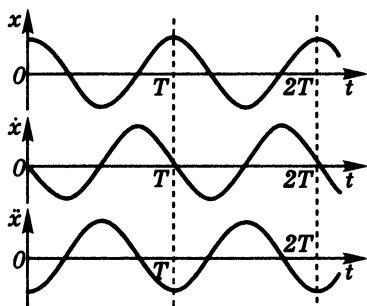


Рис. 5.2.

Графики скорости и ускорения при гармонических колебаниях

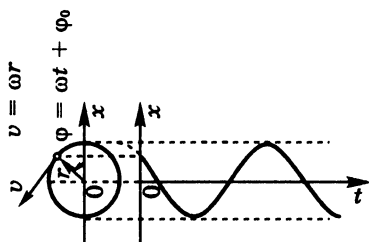


Рис. 5.3.

Связь гармонических колебаний с равномерным движением по окружности (векторная диаграмма)

ся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки, так что угол  $\varphi$ , который он образует с осью  $x$ , линейно растет со временем:  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ . При этом проекции на ось  $x$  радиуса-вектора  $r$ , векторов скорости  $v$  и ускорения  $a$  изменяются по гармоническому закону в соответствии с (5.1)–(5.3). Такой графический способ представления колебаний называется *векторной диаграммой*: любой совершающей гармоническое колебание величине сопоставляется проекция равномерно вращающегося вектора, модуль которого равен амплитуде рассматриваемого колебания, а угловая скорость — круговой частоте  $\omega$ . Подчеркнем, что этот вектор не имеет ничего общего с векторными физическими величинами.

В тех случаях, когда с рассматриваемыми гармоническими величинами требуется выполнить линейные операции (умножение на число, сложение, дифференцирование, интегрирование), эти операции можно выполнять непосредственно над векторами, а в полученном результате взять проекцию на ось  $x$ .

### 5.3. Собственные колебания простых систем

1°. Если физическую систему, обладающую состоянием *устойчивого равновесия*, вывести из этого состояния каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе,

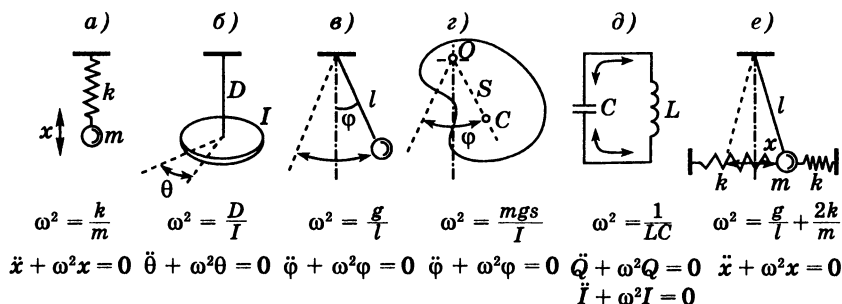


Рис. 5.4.

Примеры осцилляторов: а — пружинный маятник;

б — крутильный маятник (диск на упругой нити); в — простой (математический) маятник; г — физический маятник;

д — колебательный контур; е — комбинированный маятник

то возникающие в системе колебания вблизи устойчивого равновесия называют *собственными* или *свободными*. Способную совершать собственные колебания систему называют *осциллятором*. Примеры осцилляторов приведены на рис. 5.4.

Собственные колебания в идеализированных *консервативных* системах (п. 2.4.7°) будут строго *периодическими* *незатухающими*. При наличии трения (или электрического сопротивления) происходит *затухание* собственных колебаний, обусловленное диссипацией энергии. Если *восстанавливающая* сила, т. е. сила, стремящаяся вернуть консервативную механическую систему в положение равновесия, пропорциональна отклонению от равновесия, то собственные колебания будут *гармоническими*. Например, у пружинного маятника (рис. 5.4, а) возвращающая сила упругости  $F$  деформированной пружины пропорциональна смещению  $x$  из равновесия:

$$F = -kx \quad (5.4)$$

( $k$  — жесткость пружины).

В отсутствие других сил дифференциальное уравнение (п. М5.5.1°) движения груза массы  $m$  (уравнение второго закона Ньютона) имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (5.5)$$

где введено обозначение  $\omega^2 \equiv k/m$ . Такой же вид имеют уравнения и для других осцилляторов, если под  $x(t)$  понимать у каждого из них соответствующую величину, характеризующую отклонение от равновесия: угол  $\theta$  закручивания упругого подвеса на рис. 5.4, б; угол  $\varphi$  отклонения от вертикали математического или физического маятника на рис. 5.4, в, г; заряд  $Q$  конденсатора или силу тока  $I$  в колебательном контуре на рис. 5.4, д. Коэффициент  $\omega^2$  при  $x$  в уравнении (5.5) равен квадрату круговой частоты собственных колебаний (п. 5.3.2°) и для каждого осциллятора выражается через его характеристики: жесткость  $k$  пружины и массу  $m$  груза у пружинного маятника ( $\omega^2 = k/m$ ); модуль кручения  $D$  подвеса и момент инерции  $J$  диска у крутильного маятника ( $\omega^2 = D/J$ ); напряженность  $g$  поля тяготения и длину  $l$  у простого маятника ( $\omega^2 = g/l$ ); расстояние  $s$  от точки подвеса  $O$  до центра масс  $C$ , момент инерции  $J$  относительно оси  $O$  и массу  $m$  у физического маятника ( $\omega^2 = mgs/J$ ); емкость  $C$  конденсатора и индуктивность  $L$  катушки у колебательного контура ( $\omega^2 = 1/(LC)$ ).

Для систем, где действуют несколько возвращающих сил (комбинированный маятник на рис. 5.4, е), коэффициент  $\omega^2$  в уравнении (5.5), т. е. квадрат собственной частоты, равен сумме квадратов собственных частот, которые были бы при действии только одной из возвращающих сил:  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots$ . У комбинированного маятника (рис. 5.4, е)  $\omega_1^2 = g/l$  из-за вклада силы тяжести в возвращающую силу,  $\omega_2^2 = 2k/m$  из-за сил упругости пружин.

**2°. Общее решение** уравнения (5.5) — гармоническое колебание (5.1) с произвольными амплитудой  $A$  и начальной фазой  $\varphi_0$ . Их значения определяются *начальными условиями*, т. е. способом возбуждения колебаний. Если, например, систему отклоняют из положения равновесия на  $x_0$  и отпускают без начального толчка (начальные условия  $x(0) = x_0$  и  $\dot{x}(0) = 0$ ), то  $A = x_0$  и  $\varphi_0 = 0$ :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t. \quad (5.6)$$

Если колебание возбуждают толчком, т. е. в положении равновесия сообщают начальную скорость ( $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = v_0$ ), то  $A = v_0/\omega$  и  $\varphi_0 = -\pi/2$ :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (5.7)$$

В общем случае при  $x(0) = x_0$  и  $\dot{x}(0) = v_0$  амплитуда и начальная фаза соответствующего *частного решения* уравнения (5.5) находятся по формулам

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (5.8)$$

Частота  $\omega$  колебания, в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависит от способа возбуждения, а определяется свойствами самой системы. Независимость периода колебаний от начальных условий известна как *свойство изохронности* гармонического осциллятора.

**3°.** Собственные колебания сопровождаются *превращениями энергии* из одного вида в другой и обратно (рис. 5.5). В точках наибольшего отклонения механического осциллятора из положения равновесия (в точках поворота) кинетическая энергия обращается в нуль и вся энергия осциллятора — это *потенциальная* энергия сжатой пружины (пружинный маятник), закрученного подвеса (крутильный маятник) или груза в поле тяжести (математический и физический маятник). Через четверть периода осциллятор проходит через положение равновесия. В этот момент потенциальная энергия обращается в нуль и вся энергия осциллятора — это *кинетическая* энергия груза. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение кинетической энергии в потенциальную. Такие превращения происходят дважды за период. Зависимость потенциальной энергии от времени (для пружинного маятника) имеет вид

$$W_n(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{4} k A^2 [1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)]$$

— колебания потенциальной энергии происходят с удвоенной частотой (см. рис. 5.5). Колебания кинетической энергии происходят в противофазе с потенциальной, а их сумма (т. е. полная энергия осциллятора) во все моменты времени одна и та же и равна максимальным значениям кинетической и потенциальной

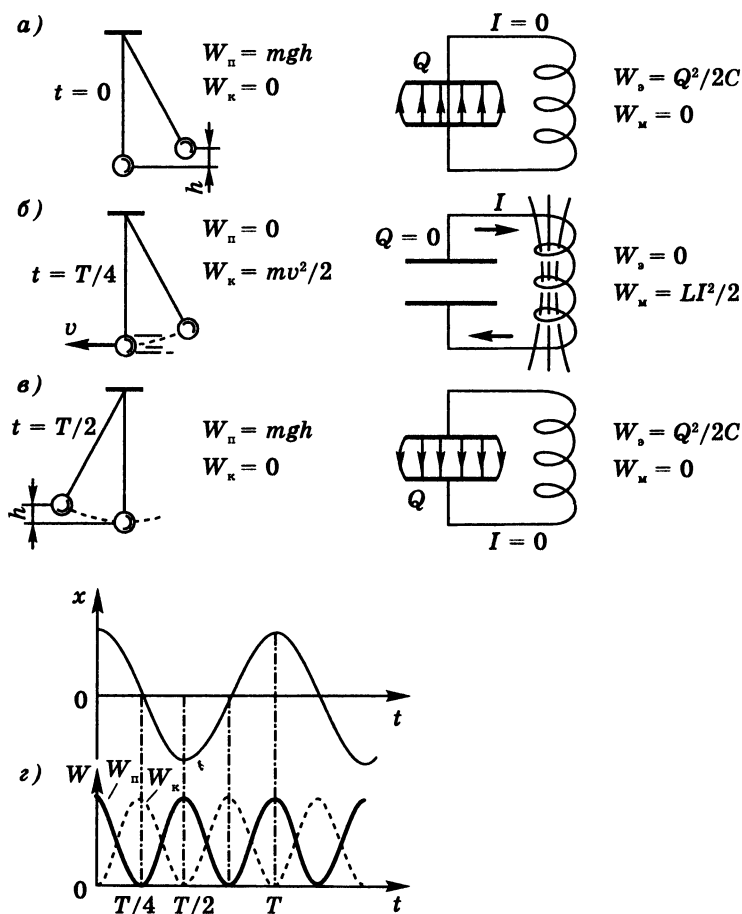


Рис. 5.5.

Превращения энергии при колебаниях (а-в) и графики ее зависимости от времени (г)

ной энергий. *Средние* за период значения кинетической и потенциальной энергий совпадают:

$$\langle W_k(t) \rangle = \langle W_n(t) \rangle.$$

Для колебательного контура аналог потенциальной энергии механического осциллятора — это энергия электрического поля в конденсаторе, аналог кинетической энергии груза — энергия магнитного поля в катушке индуктивности (см. рис. 5.5).

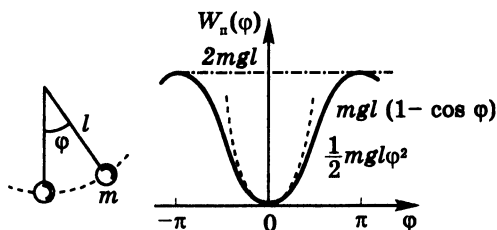
4°. Чтобы собственные колебания происходили по гармоническому закону и их частота не зависела от амплитуды, *возвращающая сила* должна быть *пропорциональна смещению* ( $F = -kx$  для пружинного маятника), а потенциальная энергия — квадрату смещения ( $W_n = kx^2/2$ ). Такие колебательные системы называются линейными, так как их поведение описывается линейными дифференциальными уравнениями (в уравнение искомая функция и ее производные входят в первой степени). Для математического и физического маятников так будет только при малых углах отклонения от вертикального положения (рис. 5.6, см. п. М10.2.1°):

$$W_n(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{2}mgl\varphi^2.$$

При больших амплитудах маятник описывается нелинейным уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0.$$

Рис. 5.6.  
Потенциальная энергия  
маятника  
и гармонического  
осциллятора





Колебания маятника становятся *ангармоническими*, и их период начинает зависеть от амплитуды  $\varphi_m$ :

$$T \approx T_0 (1 + \varphi_m^2/16), \quad T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

5°. В реальных колебательных системах из-за трения (или электрического сопротивления) происходит *диссипация* (рассеяние) механической (или электромагнитной) энергии и собственные колебания неизбежно *затухают*. Часто встречаются случаи, когда сила трения пропорциональна скорости:  $F = -\lambda v$  (вязкое трение). При этом дифференциальное уравнение движения (второй закон Ньютона), например для тела массы  $m$  на пружине жесткости  $k$ , принимает вид

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.9)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — круговая частота собственных колебаний в отсутствие трения,  $\gamma = \lambda/2m$  — коэффициент затухания. К такому же виду (5.9) приводится уравнение для тока в контуре (рис. 5.7), содержащем последовательно соединенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (роль которого может играть сопротивление катушки и соединительных проводов).

Общее решение уравнения (5.9) имеет вид (рис. 5.8)

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi_0), \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (5.10)$$

где  $A_0$  и  $\varphi_0$  — произвольные постоянные, значения которых определяются из начальных условий (т. е. зависят от способа

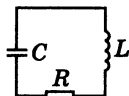


Рис. 5.7.  
Колебательный контур  
с сопротивлением

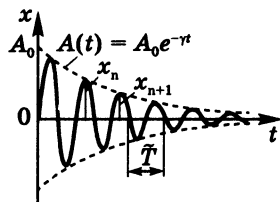


Рис. 5.8.  
Затухание колебаний  
при вязком трении

возбуждения собственных колебаний). В случае *слабого затухания* ( $\gamma \ll \omega_0$ ) частота  $\tilde{\omega}$  мало отличается от  $\omega_0$ :

$$\tilde{\omega} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \right) = \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \quad (5.11)$$

(п. М10.2.1°). В выражении (5.10) стоящий перед косинусом множитель  $A_0 e^{-\gamma t}$  можно рассматривать как медленно меняющуюся со временем амплитуду колебаний. Амплитуда уменьшается в  $e \approx 2,7$  раз за время  $\tau = 1/\gamma$  (*время затухания амплитуды*). Условие слабого затухания  $\gamma \ll \omega_0$  означает, что  $\tau \gg \tilde{T}$  ( $\tilde{T} = 2\pi/\tilde{\omega}$ ), т. е. за время  $\tau$  успевает произойти много колебаний. Периодом  $\tilde{T}$  медленно затухающих колебаний условно считают период косинусоидального сомножителя в (5.10). Последовательные максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (рис. 5.8, см. п. М5.1.6°):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A_0 e^{-\gamma(t+\tilde{T})}}{A_0 e^{-\gamma t}} \approx 1 - \gamma \tilde{T}.$$

Для характеристики затухания используют логарифмический *декремент затухания*, определяемый как логарифм отношения последовательных максимальных смещений:

$$D = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{\gamma \tilde{T}} = \gamma \tilde{T} = \frac{\tilde{T}}{\tau} = 2\pi \frac{\gamma}{\tilde{\omega}}. \quad (5.12)$$

Обратная величина  $1/D = \tau/\tilde{T}$  дает число колебаний, совершаемых за время затухания  $\tau$ . Другой эквивалентной характеристикой затухания может служить *добротность*  $Q$  осциллятора (§ 5.4):

$$Q = \frac{\pi}{D} = \frac{\pi \tau}{\tilde{T}} = \frac{\tilde{\omega}}{2\gamma} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды и при затухающих собственных колебаниях убывает по закону

$$W(t) = W_0 e^{-2\gamma t} = W_0 e^{-t/\tau_s}, \quad (5.13)$$

где  $\tau_s = 1/2\gamma = \tau/2$  — *время затухания энергии*,  $W_0$  — начальное значение энергии.

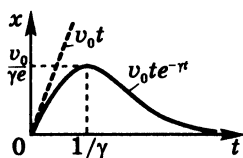


Рис. 5.9.  
Апериодическое  
движение  
осциллятора при  
сильном затухании  
( $\gamma = \omega_0$ )

При *сильном затухании* ( $\gamma \geq \omega_0$ ) возвращение осциллятора к равновесию имеет апериодический характер (отсутствие колебаний). В частности, при  $\gamma = \omega_0$  (так называемое критическое или наиболее быстрое затухание) общее решение дифференциального уравнения (5.9) имеет вид

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые из начальных условий.

Например, при  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  (толчок в положении равновесия) постоянные  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = v_0$  и  $x(t) = v_0 t e^{-\gamma t}$  (рис. 5.9).

6°. При *сухом (кулоновском) трении* (п. 2.3.2°) затухание колебаний происходит иначе (рис. 5.10). Трение покоя приводит к тому, что равновесие возможно в любом месте в пределах *области застоя*, границы которой определяются отношением максимальной силы трения покоя  $F$  к жесткости пружины  $k$ . Каждое последующее максимальное смещение меньше предыдущего смещения в ту же сторону на удвоенную ширину области застоя, т. е. убывание амплитуд происходит в арифметической прогрессии (*линейно*). Колебания прекращаются через конечное число циклов, и остановка может произойти в любой точке области застоя (в зависимости

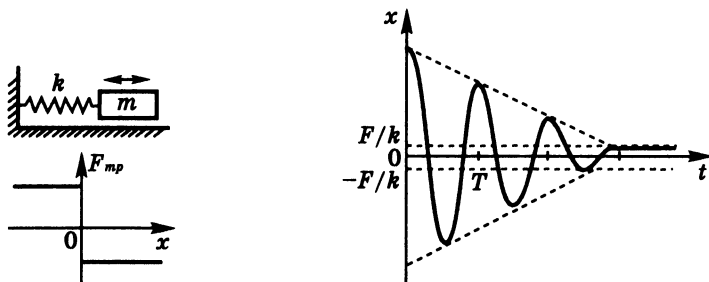


Рис. 5.10.  
Затухание колебаний при сухом трении

от начальных условий). Сухое трение не сказывается на периоде (т. е. промежутке времени между последовательными максимальными отклонениями в одну сторону):  $T = T_0 = 2\pi/\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ).

#### 5.4. Вынужденные колебания. Резонанс

1°. При действии на затухающий осциллятор синусоидальной внешней силы (рис. 5.11) через некоторое время устанавливаются гармонические колебания, происходящие на частоте  $\omega$  внешней раскачивающей силы. Зависимость амплитуды *установившихся колебаний* от частоты  $\omega$  внешнего воздействия имеет *резонансный характер*, т. е. резко возрастает при приближении  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_0$  осциллятора.

Дифференциальное уравнение (второй закон Ньютона) для вынужденных колебаний осциллятора с вязким трением (рис. 5.11) имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

или

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (5.14)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $2\gamma = \lambda/m$ ,  $f_0 = F_0/m$  ( $\lambda$  см. в п. 5.3.5°).

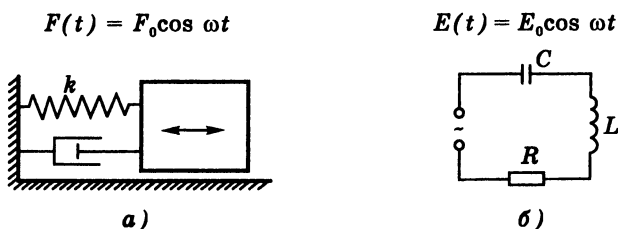


Рис. 5.11.

Механический (а) и электрический (б) затухающие осцилляторы под действием синусоидального внешнего возмущения

Установившиеся колебания описываются периодическим *частным* решением *неоднородного* уравнения (5.14):

$$x(t) = a \cos(\omega t + \delta). \quad (5.15)$$

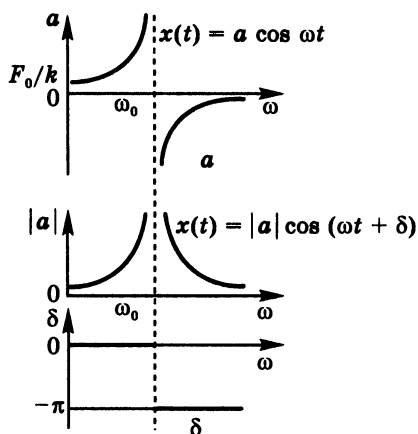


Рис. 5.12.

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний осциллятора при пренебрежении затуханием

Вдали от резонанса (при  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ ) влиянием затухания на амплитуду  $a$  и фазу  $\delta$  установившихся колебаний можно пренебречь, т. е. вместо (5.14) можно рассматривать уравнение для незатухающего осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (5.16)$$

Если искать его решение в виде  $x(t) = a \cos \omega t$ , то для амплитуды  $a$  получим (рис. 5.12, а)

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.17)$$

При  $\omega = 0$  значение  $a = f_0/\omega_0^2 = F_0/k$  соответствует статической деформации пружины под действием постоянной силы  $F_0$ . При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда неограниченно возрастает. Физически это означает, что вблизи *резонанса* ( $\omega \approx \omega_0$ ) пренебрегать затуханием нельзя. При  $\omega > \omega_0$  амплитуда  $a$  в (5.17) становится отрицательной. Это означает, что при  $\omega > \omega_0$  вынужденные колебания осциллятора происходят в противофазе с внешней силой. Если же потребовать, чтобы амплитуда была всегда неотрицательной, то решение можно записать в виде (5.15), понимая под  $a$  модуль выражения (5.17) и считая сдвиг фаз  $\delta$  равным нулю при  $\omega < \omega_0$  и равным  $-\pi$  при  $\omega > \omega_0$  (рис. 5.12, б). При  $\omega \gg \omega_0$  амплитуда  $a \rightarrow 0$ .

2°. Вблизи резонанса (а точнее, в области  $|\omega - \omega_0| \approx \gamma$ ) необходимо учитывать затухание в (5.14). Амплитуду  $a$  и сдвиг

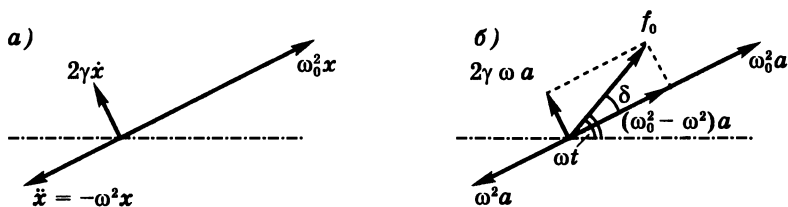


Рис. 5.13.

Векторные диаграммы для вынужденных колебаний осциллятора фаз  $\delta$  можно определить с помощью векторной диаграммы (рис. 5.13, а), сопоставляя каждому члену левой части уравнения (5.14) вращающийся вектор, длина которого равна амплитудному значению этого члена (п. 4.5.2°). Сумма этих векторов дает вектор, соответствующий правой части уравнения (5.14), т. е.  $f_0 \cos \omega t$  (рис. 5.13, б). По теореме Пифагора

$$f_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\gamma^2\omega^2 a^2,$$

откуда

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (5.18)$$

Вектор, соответствующий вынужденному колебанию осциллятора  $x(t) = a \cos(\omega t + \delta)$ , как видно из рис. 5.13, б, отстает по фазе от вектора, соответствующего вынуждающей силе  $f_0 \cos \omega t$ , поэтому

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (5.19)$$

Графики  $a(\omega)$  (резонансная кривая) и  $\delta(\omega)$  для разных значений коэффициента затухания показаны на рис. 5.14, а. Резонансу смещения (т. е. максимуму амплитуды  $a(\omega)$ ) соответствует частота

$$\omega_{\text{рез.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}.$$

При слабом затухании ( $\gamma \ll \omega_0$ )  $\omega_{\text{рез.}} \approx \omega_0 - \gamma^2/\omega_0$ , т. е. резонансная частота практически совпадает с собственной частотой  $\omega_0$ . Амплитуда вынужденных колебаний при резонансе

$$a_{\text{max}} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{f_0}{2\gamma\omega_0}. \quad (5.20)$$

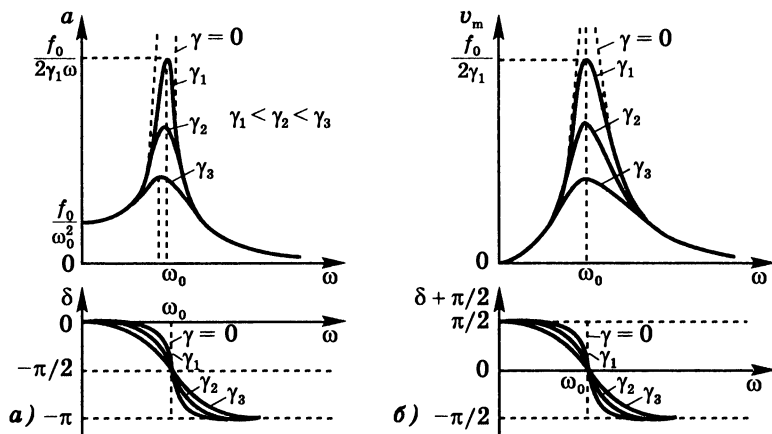


Рис. 5.14.

Зависимость амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний от частоты внешней силы: *а* — для смещения  $x(t) = a \cos(\omega t + \delta)$ ; *б* — для скорости  $\dot{x}(t) = v_m \cos(\omega t + \delta + \pi/2)$

Отношение  $a_{\max}$  к статическому смещению под действием постоянной силы  $F_0$ , равному  $a(0) = f_0/\omega_0^2$ , называется *добротностью*  $Q$  осциллятора:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (5.21)$$

Добротность, характеризующая «раскачку» осциллятора в резонансе, обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания собственных колебаний того же осциллятора (см. формулу (5.12)):

$$Q = \pi/D.$$

3°. Скорость  $v_x = \dot{x}(t)$  при вынужденных колебаниях осциллятора под действием внешней силы  $F(t) = m f_0 \cos \omega t$  также зависит от времени синусоидально:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= -a\omega \sin(\omega t + \delta) = \\ &= a\omega \cos(\omega t + \delta + \pi/2) = v_m \cos(\omega t + \delta + \pi/2), \end{aligned} \quad (5.22)$$

причем амплитуда колебаний скорости следующим образом зависит от частоты внешней силы:

$$v_m(\omega) = \omega a(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega)^2 + 4\gamma^2}}. \quad (5.23)$$

Максимум резонансной кривой для скорости (рис. 5.14, б) расположен при  $\omega = \omega_0$ , т. е. при точном совпадении частоты внешней силы с собственной частотой осциллятора.

4°. Кинетическая и потенциальная энергии осциллятора при вынужденных колебаниях изменяются в противофазе друг с другом с удвоенной частотой внешней силы (рис. 5.15), но, в отличие от собственных колебаний, средние значения  $\langle W_k \rangle$  и  $\langle W_n \rangle$  не равны между собой. При  $\omega < \omega_0$  преобладает потенциальная энергия (при  $\omega \ll \omega_0$  деформация имеет квазистатический характер и практически вся энергия осциллятора — это потенциальная энергия); при  $\omega > \omega_0$  преобладает кинетическая энергия. Полная энергия осциллятора, как видно из рис. 5.15, остается неизменной только в среднем: на протяжении четверти периода энергия поступает от внешнего источника, а в течение следующей четверти периода осциллятор возвращает энергию (работа внешней силы при этом отрицательна). Только при резонансе, когда  $\omega = \omega_0$ , полная энергия осциллятора постоянна. В резонансе внешняя сила изменяется в фазе со скоростью (рис. 5.14, б), т. е. все время действует в направлении движения. Этим обеспечиваются наиболее благоприятные условия для передачи энергии осциллятору. Совершаемая внешней силой работа компенсирует потери энергии на трение, поддерживая неизменную амплитуду колебаний.

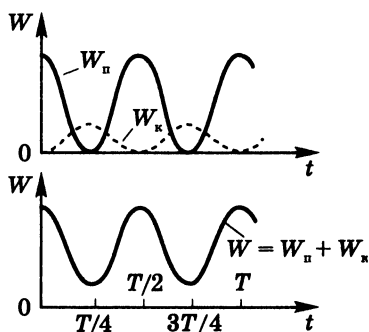


Рис. 5.15.

Энергия осциллятора, совершающего вынужденные колебания



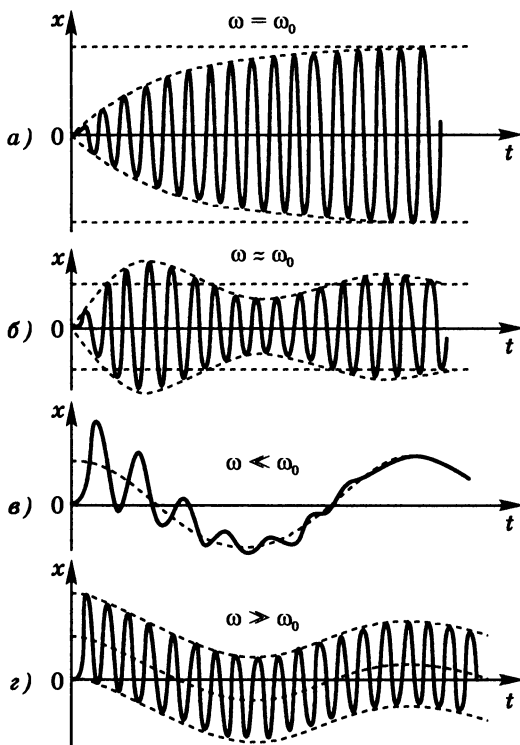


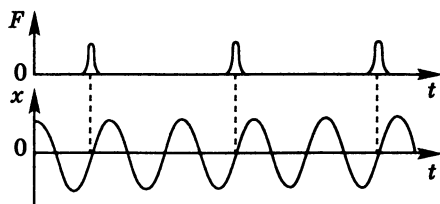
Рис. 5.16.

Установление вынужденных колебаний (переходные процессы)

5°. При больших значениях добротности  $Q$  амплитуда вынужденных колебаний при резонансе значительно (в  $Q$  раз) превышает статическое смещение под действием такой же (но постоянной) силы. Ясно, что такая амплитуда колебаний не может установиться сразу после «включения» раскачивающей силы, так как требуется время для того, чтобы слабая внешняя сила сообщила большой запас энергии осциллятору, первоначально покоившемуся. *Переходный процесс* нарастания амплитуды продолжается (при  $\omega = \omega_0$ ) приблизительно  $Q$  периодов (рис. 5.16, а).

В общем случае переходный процесс *установления колебаний* представляет собой наложение установившихся колеба-

Рис. 5.17.  
Колебания осциллятора  
под действием  
периодических коротких  
толчков



ний неизменной амплитуды на частоте  $\omega$  (т. е. периодического частного решения (5.15) неоднородного уравнения (5.14)) и затухающих собственных колебаний на частоте  $\omega_0$  (т. е. общего решения (5.10) однородного уравнения (5.9)), амплитуда и фаза которых определяются из начальных условий. Графики процессов установления колебаний первоначально покоившегося осциллятора, который при  $t = 0$  начала раскачивать внешняя сила  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , приведены на рис. 5.16.

6°. Вынужденные колебания осциллятора под действием периодических внешних толчков (рис. 5.17) будут почти синусоидальными, когда период чередования толчков совпадает с периодом собственных колебаний осциллятора либо кратен ему. Фаза колебаний сама устанавливается таким образом, что толчки приходятся на те моменты времени, когда осциллятор проходит положение равновесия. Сообщаемая осциллятору при каждом толчке энергия мала по сравнению с запасом его энергии и равна энергии, рассеиваемой осциллятором за период.

## 5.5. Параметрический резонанс. Автоколебания

1°. Незатухающие колебания осциллятора возможны не только при действии внешней периодической силы, но и при периодическом изменении какого-либо параметра (длины маятника, жесткости пружины, емкости конденсатора колебательного контура и т. п.). Примером такого возбуждения колебаний, называемого *параметрическим резонансом*, может служить раскачивание качелей, когда находящийся на них человек регулярно приседает и выпрямляется, периодически перемещая тем самым положение центра масс системы.

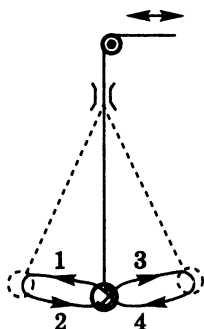


Рис. 5.18.

Параметрическое  
возбуждение  
колебания  
маятника

Пусть, например, длину подвеса маятника немного уменьшают каждый раз, когда он проходит через положение равновесия, подтягивая нить, перекинутую через блок (рис. 5.18), а в каждом крайнем положении нить отпускают на ту же длину. Сила натяжения нити в крайних положениях меньше, чем при прохождении через вертикаль, поэтому положительная работа внешней силы при подтягивании нити оказывается больше, чем модуль отрицательной работы при отпускании нити. В целом за период работа внешней силы положительна, и если она превосходит потери энергии из-за трения,

колебания маятника нарастают. Рост амплитуды ограничивается нелинейными эффектами.

Изменения длины нити не могут вывести первоначально покоившийся маятник из равновесия, поэтому для параметрической раскачки в системе уже должны происходить (небольшие) собственные колебания. Малые начальные возмущения всегда существуют из-за неизбежных в любой реальной системе флуктуаций.

В отличие от резонанса при вынужденных колебаниях, параметрический резонанс происходит при изменении параметров осциллятора с частотой, удвоенной по сравнению с собственной частотой, а также при частотах  $\omega_n$  или периодах  $T_n$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\omega_n = 2\omega_0/n, \quad T_n = nT_0/2, \quad (5.24)$$

где  $n$  — целое число. Нарастание колебаний возможно не только при точном выполнении соотношения (5.24), но и в некоторых конечных интервалах значений  $\omega$  вблизи  $\omega_n$  (в зонах неустойчивости), ширина которых тем больше, чем сильнее изменяется параметр осциллятора (например, длина маятника). Параметрический резонанс используется для усиления и генерации электромагнитных колебаний различных частот, вплоть до оптических (параметрические генераторы света).

2°. Автоколебания отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для их поддержания не требуется периодических воздействий извне. Незатухающие колебания поддерживаются благодаря способности автоколебательных систем управлять поступлением энергии от постоянного источника. Форма, амплитуда и частота колебаний задаются самой системой. Примеры автоколебаний — колебания воздуха в органной трубе, скрипичной струне при равномерном движении смычка, колебания тока в радиотехническом генераторе, маятника в часах.

Характерные элементы простых автоколебательных систем — резонатор, постоянный источник энергии и устройство обратной связи между резонатором и источником энергии. *Резонатор* — это система, в которой могут происходить собственные затухающие колебания (маятник часов, колебательный контур радиотехнического генератора, струна смычкового музыкального инструмента). *Обратная связь* осуществляется устройством, с помощью которого резонатор сам регулирует поступление энергии от источника. Благодаря обратной связи обеспечивается восполнение энергии резонатора, компенсирующее потери, так что амплитуда колебаний остается неизменной.

В механических часах обратная связь осуществляется анкерным механизмом (рис. 5.19). К маятнику прикреплен изогнутый рычаг (анкер), на концах которого имеются выступы специальной формы (палетты). Пружина стремится повернуть ходовое колесо, но большую часть времени оно упирается одним из зубьев в боковую поверхность правой или левой палетты, скользящей при качании маятника по поверхности зуба. Только в моменты прохож-

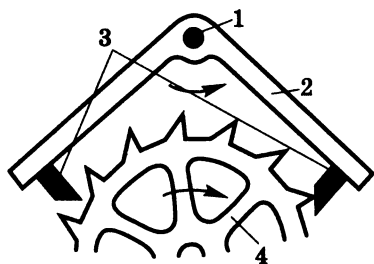


Рис. 5.19.

Анкерный механизм часов:  
1 — ось маятника, 2 — анкер,  
3 — палетты, 4 — ходовое  
колесо

дения маятника через положение равновесия палетты перестают преграждать путь зубьям и колесо поворачивается на один зубец, подталкивая анкер с маятником зубом, скользящим своей вершиной по скошенному торцу палетты. Эти толчки восполняют потери энергии маятника из-за трения.

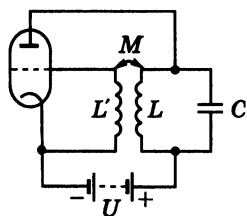


Рис. 5.20.  
Схема лампового генератора

В ламповом генераторе (рис. 5.20) обратная связь осуществляется включенной между катодом и сеткой лампы катушкой  $L'$ , индуктивно связанной с катушкой  $L$  колебательного контура. Случайно возникшие в контуре малые собственные колебания через катушку  $L'$  управляют анодным током  $I$  лампы, который усиливает колебания в контуре (при надлежащем взаимном расположении катушек  $L$  и  $L'$ , обеспечивающем положительную обратную связь).

Если потери в контуре меньше, чем подводимая к нему таким образом энергия, то амплитуда колебаний нарастает. Рост амплитуды ограничивается нелинейной зависимостью анодного тока лампы от напряжения на сетке. В результате устанавливаются стационарные колебания определенной амплитуды, когда все потери энергии компенсирует включенная в анодную цепь батарея. Такой режим возбуждения автоколебаний, не требующий первоначального толчка, называется *мягким*. В системах с *жестким* режимом возбуждения колебания нарастают только начиная с некоторой начальной амплитуды. Для перехода таких систем в режим генерации необходим начальный толчок, превышающий определенное критическое значение.

Подчеркнем, что форма, амплитуда и частота автоколебаний определяются только параметрами системы (в отличие от вынужденных колебаний, амплитуда, частота и фаза которых определяются внешней силой). Автоколебательные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

## 5.6. Колебания сложных систем.

### Сложение колебаний

1°. Маятник, который может совершать колебания одновременно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, дает простейший пример системы с *двумя степенями свободы* — для характеристики его положения нужно задать две величины, например координаты  $x$  и  $y$  (рис. 5.21, а). Определенным выбором начальных условий можно заставить его совершать свободные колебания либо вдоль оси  $x$ , либо вдоль оси  $y$ . При малых амплитудах эти колебания будут гармоническими и будут иметь одну и ту же частоту  $\omega = \sqrt{g/l}$  (совпадение частот таких нормальных колебаний называют *вырождением*):

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (5.25)$$

Таковыми же уравнениями (с  $\omega = \sqrt{2k/m}$ ) описывается движение тела, закрепленного на двух парах одинаковых пружин (рис. 5.21, б).

При произвольных начальных условиях возбуждаются оба колебания одновременно, и движение маятника представляет собой их наложение. Результат сложения зависит от соотношения амплитуд и фаз этих колебаний. Если фазы одинаковы или отличаются на  $\pi$ , колебания происходят в одной плоскости, а траектория представляет собой отрезок прямой (диагональ прямоугольника со сторонами  $2x_m, 2y_m$ ). Когда сдвиг фаз

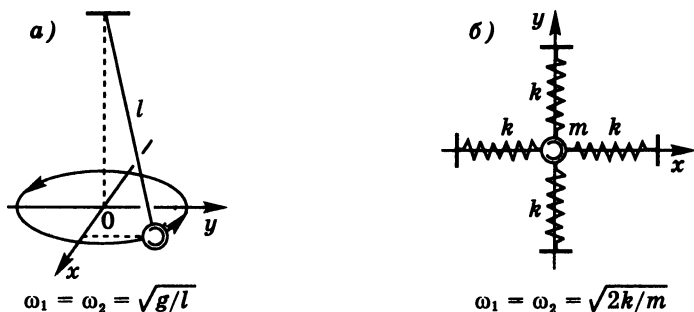


Рис. 5.21.

Вырожденные системы с двумя степенями свободы

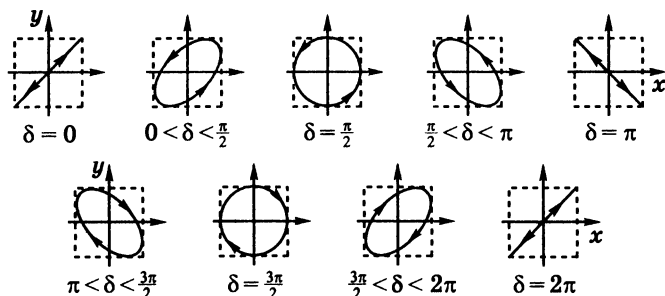


Рис. 5.22.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний  
одинаковой частоты и амплитуды при разных значениях  
разности фаз  $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$

составляет  $\pm\pi/2$ , а амплитуды равны, траектория — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ . В этом легко убедиться, возводя в квадрат и складывая следующие уравнения:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y(t) = \pm a \sin(\omega t + \varphi_1).$$

В общем случае траектория представляет собой эллипс, вписанный в прямоугольник со сторонами  $2x_m$ ,  $2y_m$ . Результаты сложения таких взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты при разных значениях разности фаз  $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$  и одинаковых амплитудах  $x_m = y_m = a$  показаны на рис. 5.22. Таким образом, любое движение маятника можно разложить на сумму нормальных колебаний (5.25) с определенными амплитудами  $x_m$ ,  $y_m$  и фазами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . Но в случае вырождения (т. е. совпадения частот  $\omega_1 = \omega_2$  выбор нормальных колебаний неоднозначен: в качестве осей  $x$  и  $y$  можно выбрать любые взаимно перпендикулярные направления в этой плоскости. В частности, для системы, изображенной на рис. 5.21, б, оси  $x$  и  $y$  можно выбрать и не вдоль пружин.

2°. Маятник, подвешенный на петле (рис. 5.23, а), и груз, закрепленный на пружинах, имеющих различные жесткости (рис. 5.23, б), также представляют собой системы с двумя степенями свободы. Здесь тоже можно найти начальные усло-

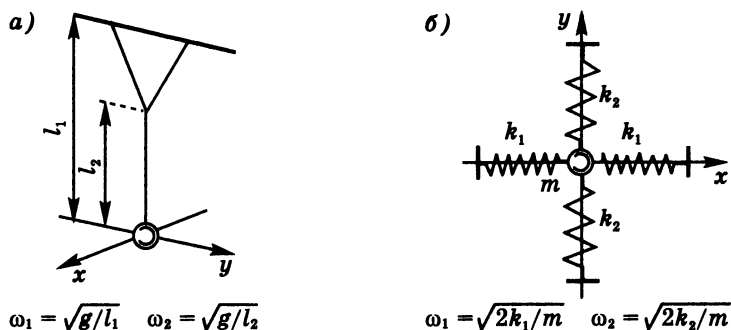


Рис. 5.23.

Колебательные системы с двумя степенями свободы

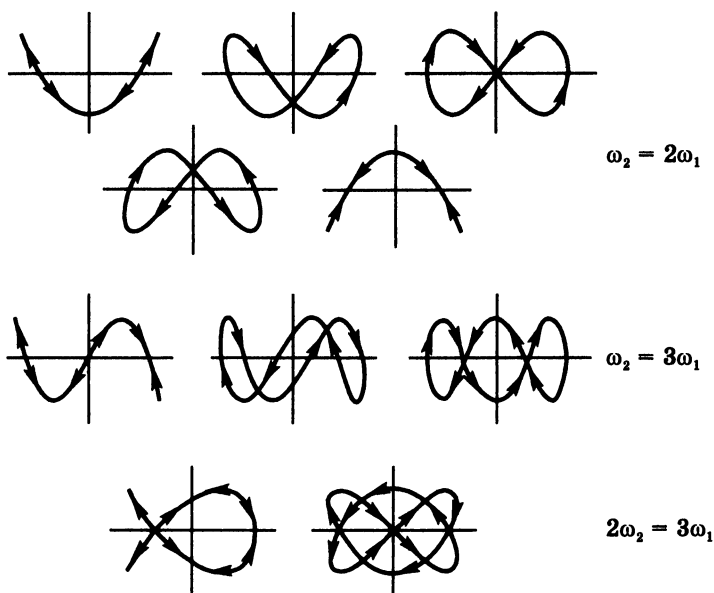


Рис. 5.24.

Фигуры Лиссажу

вия, при которых движение системы будет представлять собой гармоническое колебание. Таких движений, называемых *нормальными колебаниями* или *модами*, любая система имеет столько, сколько у нее степеней свободы. В приведенных на рис. 5.23 примерах систем это колебания вдоль осей  $x$  и  $y$ .



Однако теперь частоты, соответствующие отдельным модам, различны:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (5.26)$$

О совокупности частот нормальных колебаний говорят как о *спектре* системы. Любое свободное движение системы может быть представлено в виде суммы нормальных колебаний с определенными амплитудами и фазами.

Когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  относятся как целые числа, траектория представляет собой замкнутую кривую (*фигуру Лиссажу*), вписанную в прямоугольник со сторонами  $2x_m$ ,  $2y_m$  (рис. 5.24).

**3°. Связанные маятники** (рис. 5.25, а) дают пример системы с двумя степенями свободы, где соответствующие отдельным модам колебания происходят вдоль одного направления. Частота первой моды  $\omega_1 = \sqrt{g/l}$ , так как при синфазных колебаниях соединяющая маятники пружина все время остается недеформированной и на их колебания не влияет (рис. 5.25, б). Частота второй моды (рис. 5.2, в) определяется соотношением  $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$  (при колебаниях в противофазе средняя точка пружины неподвижна и частота будет такой же, как у комбинированного маятника с пружиной жесткости  $2k$ , см. рис. 5.25, г).

При произвольных начальных условиях движение каждого из маятников представляет собой сумму гармонических колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (спектр системы состоит из двух частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ). Интересен случай *слабой связи*, когда  $k/m \ll g/l$

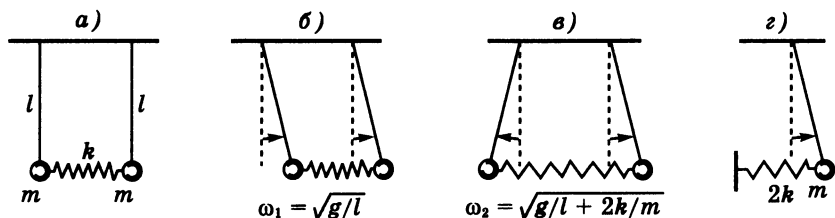


Рис. 5.25.

Моды связанных маятников

и разность частот нормальных колебаний  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  мала по сравнению с каждой из них. Пусть, например, в начальный момент левый маятник отклонен на расстояние  $2a$ , а правый — в положении равновесия, и система отпускается без начального толчка. Таким начальным условиям соответствует следующее решение (п. М4.2.2°):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \omega t, \\ x_2(t) &= a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = 2a \sin \frac{\Delta\omega}{2} t \sin \omega t, \end{aligned} \quad (5.27)$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ,  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  — средняя частота, причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Выражения (5.27) можно рассматривать как почти гармонические колебания с частотой  $\omega$  и медленно пульсирующими амплитудами (рис. 5.26, а). Такой тип движения называют *биениями*. При начальном возбуждении запас энергии сообщается одному маятнику, но благодаря связи между ними энергия постепенно переходит к другому, а затем обратно. Полный цикл биений совершается за время  $T_0 = 2\pi/\Delta\omega$ . Чем сильнее связь (т. е. чем больше жесткость пружины), тем больше  $\Delta\omega$  и тем быстрее происходит обмен энергией.

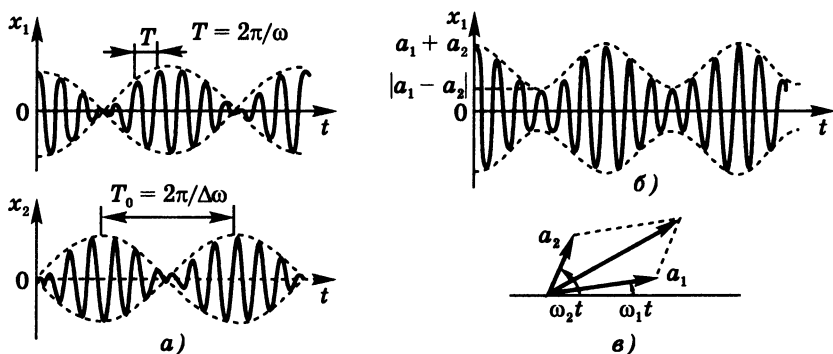


Рис. 5.26.

Биения (а), модулированные колебания (б) и векторная диаграмма (в) для сложения колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и амплитудами  $a_1$  и  $a_2$

Если возбуждены обе моды с разными амплитудами ( $a_1 \neq a_2$ ), колебание каждого из маятников будет *модулированным* (рис. 5.26, б), т. е. амплитуда медленно изменяется между значениями  $a_1 + a_2$  и  $|a_1 - a_2|$ . Это легко увидеть из векторной диаграммы на рис. 5.26, в, где векторы длины  $a_1$  и  $a_2$  вращаются с разными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

4°. При *вынужденных колебаниях* систем с несколькими степенями свободы под действием синусоидальной внешней силы с частотой  $\omega$  резонанс наступает при совпадении  $\omega$  с каждой из собственных частот. Например, при действии на первый из связанных маятников (рис. 5.25, а) внешней силы  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  установившиеся колебания каждого из них происходят на частоте  $\omega$  внешнего воздействия и в отсутствие затухания имеют вид

$$x_1 = b_1 \cos \omega t, \quad x_2 = b_2 \cos \omega t. \quad (5.28)$$

Зависимость амплитуд  $b_1$  и  $b_2$  от  $\omega$  показана на рис. 5.27, а. При приближении  $\omega$  к  $\omega_1$  или  $\omega_2$  амплитуды  $b_1$  и  $b_2$  растут (неограниченно, если пренебрегать затуханием), причем вблизи резонанса на частоте  $\omega_1$ , колебания маятников происходят синфазно (знаки  $b_1$  и  $b_2$  одинаковы), т. е. как при свободных колебаниях в первой моде, а на частоте  $\omega_2$  — в противофазе (знаки  $b_1$  и  $b_2$  противоположны), т. е. по типу свободных колебаний второй моды.

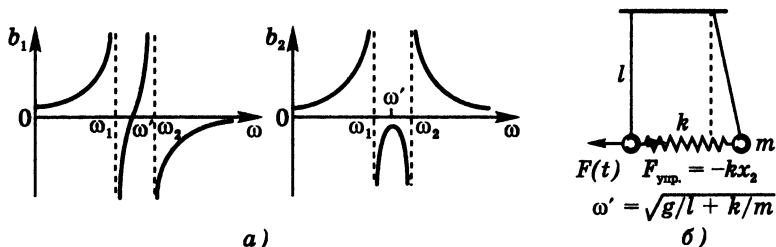


Рис. 5.27.

Резонансные кривые для вынужденных колебаний связанных маятников (а) и динамическое успокоение колебаний (б)

Интересно, что при некоторой частоте  $\omega'$ , лежащей между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , амплитуда  $b_1$  первого маятника, на который и действует внешняя раскачивающая сила, обращается в нуль. Второй маятник при этом качается в противофазе с внешней силой ( $b_2 < 0$ ), и сила упругости соединяющей маятники пружины компенсирует действующую на первый маятник внешнюю силу, обеспечивая его неподвижность (рис. 5.27, б). Частота  $\omega'$  равна частоте свободных колебаний второго маятника при закреплённом первом (*парциальной частоте*):  $\omega' = \sqrt{g/l + k/m}$ . Основанный на этом явлении метод успокоения нежелательных вибраций фундаментов машин (присоединением дополнительного устройства, колебания которого не причиняют вреда) называется *динамическим демпфированием* и широко применяется там, где частота вредных вибраций постоянна.

5°. Свободные и вынужденные электромагнитные колебания в контурах, связанных емкостной связью (рис. 5.28, а), характеризуются такими же закономерностями, как и колебания связанных маятников. Первой моде соответствуют синфазные колебания, когда суммарный ток в ответвлении, содержащем конденсатор связи  $C_{св}$ , равен нулю. Так как емкость  $C_{св}$  в этом случае в колебаниях не участвует, частота колебаний  $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ . Во второй моде колебания происходят в противофазе, их частота  $\omega_2 = \sqrt{1/LC + 2/LC_{св}}$  (на каждый контур при этом приходится по «половине» конденсатора  $C_{св}$ ; так же как при противофазных колебаниях грузов в механическом аналоге на рис. 5.28, б участвует «половина» соеди-

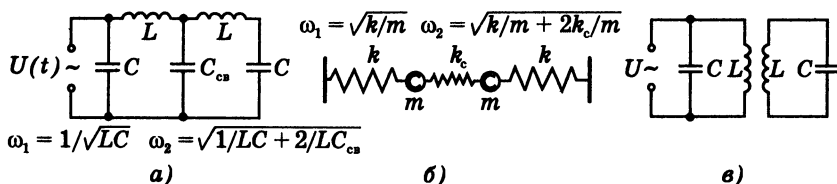


Рис. 5.28.

Контуры с емкостной связью (а), механический аналог такой системы (б) и контуры с индуктивной связью (в)

нительной пружины  $k_c$ , что дает  $\omega_2 = \sqrt{k/m + 2k_c/m}$ . Условию слабой связи здесь соответствует  $1/C_{св} \ll 1/C$  (в механическом аналоге  $k_c \ll k$ ). При действии синусоидального внешнего напряжения  $U(t) = U_0 \cos \omega t$  резонанс наступает при  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_2$ .

Аналогичными закономерностями характеризуются колебательные процессы и в контурах, связанных индуктивно (рис. 5.28, в).

**6°. Системы с распределенными параметрами** имеют бесконечное число степеней свободы и поэтому характеризуются бесконечным набором мод и соответствующих им дискретных частот  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Простейшие примеры таких систем — упругая натянутая струна, каждый элемент длины которой обладает как инертностью (массой), так и упругостью, или двухпроводная (либо коаксиальная) линия передачи, где каждый элемент длины обладает как индуктивностью, так и емкостью.

Некоторые поперечные моды струны с закрепленными концами показаны на рис. 5.29, а. Все точки струны, лежащие между двумя соседними узлами, т. е. точками нулевой амплитуды, совершают гармонические колебания в одинаковой фазе. Амплитуда колебаний зависит от положения точки по синусоидальному закону, достигая максимального значения посередине между узлами — в пучностях. Точки струны, находящиеся по разные стороны от узла, совершают колебания в противофазе. Нормальные колебания струны можно рассматривать как стоячие волны (п. 5.7.9°), получающиеся при сложении распространяющихся навстречу волн одинаковой частоты и амплитуды. Расстояние между узлами равно половине длины волны  $\lambda$ . Частоты  $\omega_n$  можно найти из условия, что для моды с номером  $n$  на длине струны укладывается  $n$  полуволн:  $l = n\lambda/2$ . Так как  $\lambda = vT = 2\pi v/\omega$  ( $v$  — скорость волн в струне, см. п. 5.7.4°), то

$$\omega_n = \frac{\pi v}{l} n. \quad (5.29)$$

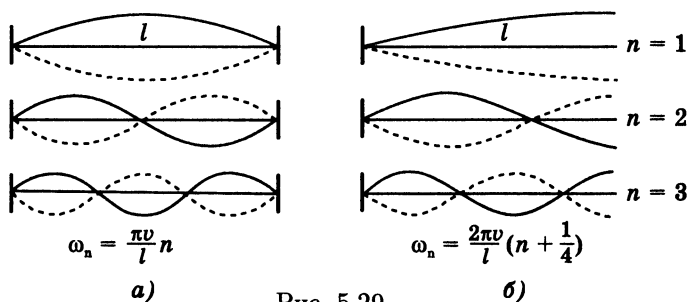


Рис. 5.29.

Первые три моды колебаний струны с закрепленными концами (а) и одним свободным концом (б)

Любое собственное колебание струны можно представить в виде суммы (в общем случае с бесконечным числом слагаемых) нормальных колебаний с дискретными частотами  $\omega_n$  (5.29) и определенными амплитудами и фазами. Частоты  $\omega_n$  образуют эквидистантный спектр, т. е. отстоят друг от друга на одинаковые интервалы  $\Delta\omega = \pi v/l$ . Частота  $\omega_1 = \pi v/l$  называется основной, частоты  $\omega_n$  ( $n > 1$ ) — *высшими гармониками*.

В струне, закрепленной на одном конце, моды характеризуются конфигурациями с пучностью на свободном конце (рис. 5.29, б). При этом на длине струны укладывается целое число полуволен и еще четверть волны:  $l = n\lambda/2 + \lambda/4$ . Такие же конфигурации характерны для колебаний воздуха в органной трубе, закрытой с одного конца, и для электромагнитных колебаний в линии, закороченной на одном конце.

Нормальные колебания более сложных систем (например, упругих пластинок той или иной формы, стакана или колокола и т. п.) тоже образуют бесконечный набор дискретных частот, однако соотношения между частотами, а также форма и расположение узловых линий оказываются весьма сложными даже для тел сравнительно простой геометрической формы.

## 5.7. Волны

1°. *Волнами* называют изменения равновесного состояния (возмущения) среды, *распространяющиеся* в этой среде. Основное свойство всех волн, независимо от их природы, состоит

в том, что в них осуществляется перенос энергии без переноса вещества. При прохождении волны частицы среды совершают движение (обычно колебательное) около своих средних равновесных положений.

Волновые процессы чрезвычайно многообразны и встречаются почти во всех областях физических явлений. По физической природе различают *механические волны*, частными случаями которых являются упругие волны (в том числе звуковые и сейсмические), волны на поверхности жидкости; *электромагнитные волны* в волноводах, в различных средах и в свободном пространстве (в том числе радиоволны, свет, рентгеновское излучение). В некоторых видах волн колебания электромагнитного поля связаны с механическими колебаниями частиц среды (например, волны в плазме).

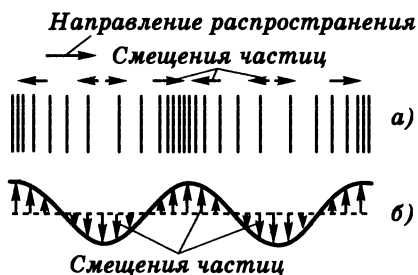


Рис. 5.30.

Продольная (а)  
и поперечная (б) волны

2°. По ориентации возмущений относительно направления распространения различают *продольные волны* (например, звуковые волны в газе, где смещения частиц вещества происходят вдоль направления распространения, см. рис. 5.30, а) и *поперечные волны* (например, волны в струне, где ча-

стицы смещаются перпендикулярно направлению распространения, см. рис. 5.30, б). В жидкостях и газах могут распространяться только продольные упругие волны, так как в них упругие силы возникают только при сжатиях и разрежениях. В твердых телах могут распространяться еще и поперечные упругие волны, так как в них упругие силы возникают и при деформациях сдвига. В анизотропных твердых средах и в твердых телах ограниченного размера (в стержнях, пластинках) возможны и другие (более сложные) типы волн.

Электромагнитные волны в свободном пространстве поперечны, так как направления электрического и магнитного по-

лей перпендикулярны направлению распространения (однако в волноводах векторы полей могут иметь и продольные составляющие). В волнах на поверхности жидкости (п. 5.7.12°) частицы совершают круговые или эллиптические движения, т. е. такие волны не являются ни поперечными, ни продольными. В плазме различают поляризацию волн в электродинамическом и гидродинамическом смыслах в зависимости от ориентации напряженности электрического поля волны и направления смещения частиц плазмы в волне.

**3°.** По *кинематическим* признакам, т. е. по характеру зависимости возмущения от времени в фиксированной точке (или пространственной зависимости в фиксированный момент времени), иначе говоря, *по форме*, различают *одиночные волны* или *импульсы* (рис. 5.31, а) — сравнительно короткие возмущения, не имеющие регулярного характера; *волновые пакеты* (рис. 5.31, б) — ограниченные

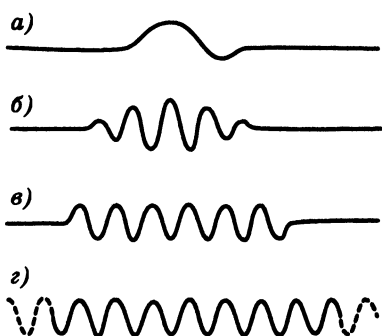


Рис. 5.31.

Одиночная волна (импульс) (а), волновой пакет (б), цуг волн (в), монохроматическая волна (г)

совокупности регулярно повторяющихся возмущений; *цуги волн* (рис. 5.31, в) — ограниченные возмущения синусоидальной формы. Важное значение для теории волновых процессов имеет представление о *гармонической* или *монохроматической волне* (рис. 5.31, г) — бесконечно протяженной волне с синусоидальной зависимостью возмущения от координат и времени.

В монохроматической волне возмущение в некоторой точке (например,  $z = 0$ ) изменяется со временем по гармоническому (синусоидальному) закону:

$$x(t) = a \cos \omega t.$$

Под  $x$  можно понимать смещение частиц среды из своих равновесных положений вдоль направления распространения (для



продольных упругих волн) или поперек (для поперечных волн), отклонение давления среды от среднего значения (для акустических волн), проекцию напряженности электрического поля (для электромагнитных волн) и т. п. Изменение возмущения в точке, отстоящей на расстояние  $z$  вдоль направления распространения волны, происходит по такому же закону, но с запаздыванием на время  $t = z/u$ , где  $u$  — *скорость распространения волны* (точнее, *фазовая скорость волны*):

$$x(z, t) = a \cos \omega \left( t - \frac{z}{u} \right) = a \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \quad (5.30)$$

т. е. возмущения во всех точках совершают гармонические колебания одинаковой частоты  $\omega$  и амплитуды  $a$ , но различающиеся по фазе.

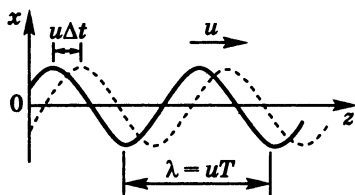


Рис. 5.32.

Монохроматическая волна

Если в (5.30) зафиксировать  $t$ , то зависимость  $x(z, t)$  от  $z$  даст мгновенную картину распределения возмущений вдоль направления распространения (рис. 5.32). Пространственный период синусоиды, т. е. расстояние между соседними горбами или впадинами, или вообще между ближайшими

точками, колебания в которых происходят в одинаковой фазе, называется *длиной волны*  $\lambda$ . Картину распространения волны можно представить себе, если эту синусоиду привести в движение со скоростью  $u$  вдоль оси  $z$ . В следующий момент  $t + \Delta t$  пространственное распределение возмущений изображается синусоидой, показанной штриховой линией на рис. 5.32. Длина волны равна расстоянию, на которое перемещается синусоида (т. е. любой горб) за период колебаний  $T$ :

$$\lambda = uT = u/\nu = 2\pi u/\omega, \quad u = \nu\lambda. \quad (5.31)$$

Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $z$ ,

$$x(z, t) = a \cos \omega(t + z/u).$$

4°. *Скорость распространения волн* тем больше, чем больше восстанавливающая сила, стремящаяся возвратить возмущенный участок в состояние равновесия, и тем меньше, чем больше инертность этого участка. В простейших случаях скорость распространения возмущения в среде зависит только от характеристик самой среды и не зависит от формы или размера возмущения. Для монохроматических волн это означает независимость фазовой скорости от длины волны, о чем говорят как об отсутствии дисперсии. Так обстоит дело для волн в натянутой струне, упругих волн (звука) в однородной среде, электромагнитных волн (света) в вакууме. В более сложных случаях скорость волн может также зависеть от их формы, амплитуды и длины волны. Зависимость фазовой скорости монохроматических волн от длины волны (или от частоты) называют *дисперсией*. Дисперсия присуща волнам на поверхности воды, электромагнитным волнам (свету) в веществе и в линиях передач. Распространение волновых пакетов при наличии дисперсии отличается рядом особенностей (п. 5.7.13°).

Характер зависимости скорости волн от параметров среды в некоторых случаях легко найти методом анализа размерностей (п. 1.3.4°). Например, для тонкой струны из физических соображений ясно, что скорость волн должна зависеть от силы натяжения  $F$  и от линейной плотности (массы единицы длины)  $\rho_l$ . Из этих величин можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность скорости:  $u \sim \sqrt{F/\rho_l}$ . Аналогично для волн сжатия в стержне скорость должна зависеть от модуля Юнга  $E$  и плотности  $\rho$ , и анализ размерностей дает  $u \sim \sqrt{E/\rho}$ . Чтобы получить числовые коэффициенты в этих формулах, требуется динамическое рассмотрение.

Приведем выражения для скорости волн в некоторых случаях:

- 1) поперечные волны в натянутой струне:

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

( $F$  — сила натяжения,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $\rho$  — плотность материала,  $\rho_l = \rho S$  — линейная плотность);

2) продольные упругие волны (звук) в тонком стержне:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

( $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — плотность);

3) продольные упругие волны в изотропном твердом веществе:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}$$

( $E$  — модуль Юнга,  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — коэффициент Пуассона);

4) поперечные (сдвиговые) волны в изотропном твердом теле:

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

( $G$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность);

5) продольные волны (звук) в идеальном газе:

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

( $\gamma = C_p/C_V$  — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме,  $p_0$  — среднее давление,  $R$  — газовая постоянная,  $M$  — молярная масса газа); в воздухе:

$$u = 20,1\sqrt{T} \text{ м/с} \approx (331 + 0,6t) \text{ м/с}$$

( $T$  — термодинамическая температура в Кельвинах,  $t$  — температура по шкале Цельсия). Значения скорости звука в некоторых веществах представлены в табл. 5.1.

Ухо человека воспринимает звуки, частота которых лежит в интервале приблизительно от 20 Гц до 20 кГц (длина волны в воздухе от 17 м до 17 мм), причем наибольшая чувствительность соответствует частоте около 3,5 кГц. Минималь-

Таблица 5.1

**Скорость звука в некоторых веществах (в м/с)**

Газ	0 °С	20 °С	Жидкость	20 °С
Воздух	331	343	Вода	1490
Азот	334	346	Морская вода	1530
Кислород	316	327	Спирт	1180
Гелий	965	981	Ртуть	1453
Водород	1284	1328	Глицерин	1923

Твердое вещество	Продольные волны	Поперечные волны	Волны в стержне
Кварц плавленный	5970	3762	5760
Стекло	3760–4800	2380–2560	3490–4550
Золото	3220	1200	2030
Латунь	4600	2080	3450

ная амплитуда давления, при которой ухо в состоянии различить звук, составляет около  $3 \cdot 10^{-5}$  Па, а порог болевого ощущения — около 30 Па (напомним, что атмосферное давление  $p_0 \approx 10^5$  Па). С возрастом частотный диапазон слышимых звуков значительно сужается. Ощущение *высоты* (тона) звука связано с частотой колебаний, а *громкости* — с их амплитудой. *Тембр* звука определяется наличием в его спектре гармоник, т. е. составляющих с частотами, кратными частоте основного тона. Не воспринимаемые на слух колебания с частотой ниже 20 Гц называют *инфразвуком*, а выше 20 кГц — *ультразвуком*.

**5°. Энергия волны** в упругой среде состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц и потенциальной энергии упругой деформации. Скорость частицы среды в монохроматической волне (5.30) зависит от равновесной координаты  $z$  этой частицы и от времени по закону

$$v(z, t) = \dot{x} = -\omega a \sin \omega \left( t - \frac{z}{u} \right). \quad (5.32)$$

Плотность кинетической энергии (т. е. энергия в расчете на единицу объема среды)

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \sin^2 \omega \left( t - \frac{z}{u} \right) \quad (5.33)$$

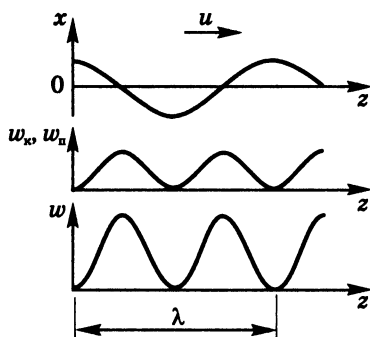


Рис. 5.33.

Зависимость возмущения  $x$  и плотности энергии  $w$  от  $z$  для фиксированного момента времени  $t$  в монохроматической бегущей волне

пропорциональна квадрату амплитуды волны. Зависимость  $w_k$  от  $z$  для фиксированного момента времени показана на рис. 5.33. Кинетическая энергия максимальна у тех частиц, которые в данный момент проходят через положение равновесия. У этих же элементов среды максимальна и потенциальная энергия, так как они деформированы сильнее других.

Можно показать, что плотность потенциальной энергии в монохроматической бегущей волне (5.30) равна плотности кинетической энергии в каж-

дой точке в каждый момент времени:  $w_n(z, t) = w_k(x, t)$ , т. е. колебания кинетической и потенциальной энергий при прохождении волны одинаковы по амплитуде и совпадают по фазе (в отличие от осциллятора, где эти изменения происходят в противофазе). Средняя (за период или на протяжении длины волны) плотность энергии в монохроматической волне

$$\langle w \rangle = \langle w_k \rangle + \langle w_n \rangle = 2 \langle w_k \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 \quad (5.34)$$

пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды.

В бегущей волне не происходит переноса вещества, так как частицы среды совершают колебания около средних положений, но энергия этих колебаний не остается локализованной и перемещается вместе с волной со скоростью  $u$ . Плотность потока энергии, т. е. средняя мощность, переносимая вол-

ной через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, получается умножением объемной плотности энергии  $\langle w \rangle$  (5.34) на скорость  $u$ :

$$\langle j \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2 u. \quad (5.35)$$

**6°.** В зависимости от условий возникновения и распространения в трехмерной среде (или на поверхности раздела сред) волны могут иметь разную форму *поверхностей* (или *линий*) *равных фаз*, называемых также *волновыми поверхностями* или *фронтами*. Для одиночных волн фронтом называют передний край возмущения, граничащий с невозмущенной средой. Линии, направления которых в каждой точке совпадают с направлением распространения энергии волны, называются *лучами*. В изотропной среде лучи ортогональны волновым поверхностям (фронтам волн).

В *плоской волне* поверхности равных фаз представляют собой плоскости, перемещающиеся в направлении распространения волны со скоростью  $u$ . Такой волне соответствует параллельный пучок прямолинейных лучей. Амплитуда плоской волны в отсутствие поглощения (диссипации) энергии одинакова на любом расстоянии от источника.

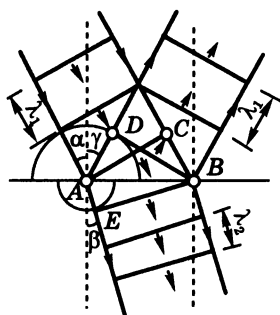
В *сферической волне* (например, волне от точечного источника) волновые поверхности — концентрические сферы, расширяющиеся со скоростью  $u$ , а лучи образуют радиально расходящийся от источника пучок. Амплитуда сферической волны убывает по мере удаления от источника пропорционально  $1/r$ , так как в отсутствие поглощения один и тот же поток энергии распределяется по большей площади (площадь пропорциональна  $r^2$ , поэтому  $\langle j \rangle \sim 1/r^2$  и  $a \sim 1/r$ ). Уравнение сферической волны:

$$x(r, t) = \frac{a_0 r_0}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{u} \right), \quad (5.36)$$

где  $a_0$  — амплитуда на расстоянии  $r_0$  от центра волны (от точечного источника).

В *цилиндрической волне* (например, от линейного источника) волновые поверхности — коаксиальные круговые цилиндры. Амплитуда такой волны (как и кольцевой волны на поверхности воды) убывает с увеличением расстояния  $r$  от оси пропорционально  $1/\sqrt{r}$  (в отсутствие поглощения).

7°. На границе раздела двух сред волна частично отражается и частично проходит во вторую среду, изменяя при этом свое направление (*преломляется*). *Законы отражения и преломления волн* можно получить из *принципа Гюйгенса*, согласно которому каждая точка среды, до которой дошло возмущение, сама становится источником вторичных сферических волн. Положение и форма волновой поверхности находятся построением *огibaющей* (т. е. общей касательной) вторичных волн. Из построения Гюйгенса для плоской волны на границе раздела (рис. 5.34) следует, что отраженный и преломленный лучи лежат в плоскости падения, что угол отражения равен углу падения ( $\gamma = \alpha$  — *закон отражения*) и что отношение синусов углов падения и преломления равно отношению фазовых скоростей волн в первой и второй средах ( $\sin \alpha / \sin \beta = u_1 / u_2$  — *закон преломления*). При прохождении волны во вторую среду частота  $\nu$  остается прежней, а изменяется длина волны: согласно (5.31)  $\lambda_1 = u_1 / \nu$ ,  $\lambda_2 = u_2 / \nu$ , поэтому  $\lambda_2 / \lambda_1 = u_2 / u_1$ .



$$CB = u_1 T$$

$$AD = u_1 T$$

$$AE = u_2 T$$

$$\sin \alpha = CB/AB \quad \sin \gamma = AD/AB$$

$$\text{Из } AD = CB$$

$$\gamma = \alpha \text{ — закон отражения}$$

$$\sin \beta = AE/AB$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= CB/AE = \\ &= u_1 / u_2 \text{ — закон преломления} \end{aligned}$$

Рис. 5.34.

Построение Гюйгенса для отраженной и преломленной волн

8°. При одновременном распространении нескольких волн каждая из них распространяется так же, как и в отсутствие других волн, и результирующее возмущение в каждой точке равно сумме возмущений, создаваемых каждой из волн. Это утверждение (*принцип суперпозиции*) соблюдается обычно с большой точностью и нарушается в некоторых средах только для волн очень большой амплитуды, распространение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями (нелинейная акустика, нелинейная оптика).

*Интерференцией волн* называется наложение двух (или нескольких) волн, при котором возникает постоянное во времени пространственное распределение амплитуд результирующих колебаний (стационарная *интерференционная картина*). Интерференция возможна при сложении волн от *когерентных* (согласованных) источников. Условие когерентности выполняется, в частности, если колебания в источниках происходят с одинаковой частотой и неизменной разностью фаз (подробнее см. п. 6.3.3°).

Простейший случай интерференции — сложение двух монохроматических волн одинаковой частоты с общим направлением (поляризацией) колебаний (рис. 5.35). Для точки наблюдения  $P$ , находящейся на большом расстоянии от источников (по сравнению с расстоянием  $d$  между ними), амплитуды обеих волн практически одинаковы. Результат интерференции в точке  $P$  зависит от

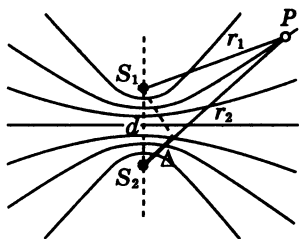


Рис. 5.35.

Положение максимумов интерференционной картины от двух источников

разности фаз приходящих туда колебаний: если *разность хода*  $\Delta = r_2 - r_1$  равна целому числу длин волн ( $r_2 - r_1 = k\lambda$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), волны приходят в фазе и при сложении дают колебание удвоенной амплитуды; если же разность хода равна нечетному числу полуволн ( $r_2 - r_1 = (2k + 1)\lambda/2$ ), волны приходят в точку  $P$  в противофазе и при сложении «гасят» друг друга. В плоскости рис. 5.35 максимумы интерференционной



картины расположены на гиперболах (п. М9.3.3°). Гашение колебаний в одних местах и усиление в других при интерференции свидетельствует о перераспределении в пространстве потока энергии от источников.

9°. При интерференции распространяющихся навстречу монохроматических волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации (например, прямой и отраженной волн) образуются *стоячие волны*. Распределение амплитуд в стоячей волне легко найти, складывая возмущения  $x_1(z, t)$  и  $x_2(z, t)$ , создаваемые прямой и отраженной волнами (п. М4.2.2°):

$$x(z, t) = a \cos \omega \left( t - \frac{z}{u} \right) - a \cos \omega \left( t + \frac{z}{u} \right) = 2a \sin \frac{\omega z}{u} \sin \omega t \quad (5.37)$$

(начальная фаза отраженной волны выбрана так, чтобы при  $z = 0$  было  $x_2 = -x_1$ ). В каждой точке происходит гармоническое колебание с частотой  $\omega$ , причем амплитуда зависит от положения точки по закону

$$a(z) = 2a \left| \sin \frac{\omega z}{u} \right|. \quad (5.38)$$

Точки  $z = n\pi u/\omega = \nu T/2 = n\lambda/2$ , в которых амплитуда равна нулю, называются *узлами* стоячей волны. Расстояние между соседними узлами равно  $\lambda/2$  (рис. 5.36). Находящиеся посередине между узлами точки максимальной амплитуды называют *пучностями*. Колебания во всех точках между соседними узлами происходят в одинаковой фазе, по разные стороны узла — в противофазе. В отличие

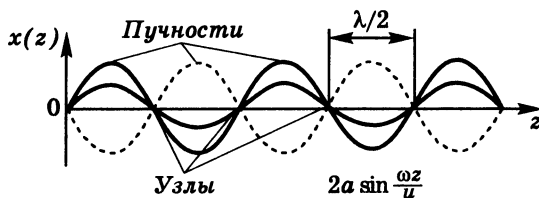


Рис. 5.36.  
Стоячая волна

от бегущей волны, здесь колебания кинетической и потенциальной энергии в каждой точке происходят в противофазе: в тот момент, когда возмущение во всех точках одновременно обращается в нуль, кинетическая энергия максимальна, а потенциальная — минимальна (обращается в нуль). Для струны, закрепленной на концах, стоячие волны представляют собой *нормальные колебания* или *моды* (п. 5.6.3°). При этом на длине струны укладывается целое число полуволн. Частоты  $\omega_n$  этих мод образуют эквидистантный спектр (5.29). При приближении частоты внешнего синусоидального воздействия к одной из собственных частот  $\omega_n$  в системе наступает *резонанс* (резкий рост амплитуды вынужденных колебаний).

10°. Находящиеся на пути волн препятствия образуют *тень*, т. е. область, в которую не проникает волновое движение (рис. 5.37). Однако границы этой области оказываются размытыми вследствие дифракции. Под *дифракцией волн* понимают отклонение от их прямолинейного распространения, огибание волнами препятствий с частичным проникновением в область геометрической тени. Качественное объяснение явлению дифракции дает принцип Гюйгенса (п. 5.7.7°), но для нахождения волнового поля за преградой нужно учесть интерференцию вторичных волн, приходящих в область геометрической тени (принцип Гюйгенса-Френеля, см. п. 6.4.1°). Непосредственно за преградой (при  $\lambda \ll d$ ,  $d$  — размер препятствия) амплитуда колебаний очень мала, но с увеличением расстояния  $l$  до значений порядка  $d^2/\lambda$  проникновение колебаний в область тени становится заметным. Особенно большое практическое значение имеет дифракция радиоволн и *дифракция света*.

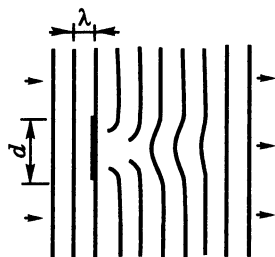


Рис. 5.37.  
Дифракция плоской  
волны на поглощающей  
преграде

11°. При движении источника волн или приемника относительно среды частота регистрируемых приемником колебаний отличается от частоты источника. В этом заключается *эффект Доплера*. Пусть источник движется со скоростью  $v_{\text{ист.}}$  вдоль  $AB$  (рис. 5.38). Поверхности равных фаз (гребни) испускаемых им волн сгущаются перед источником и разрежаются позади него. Длина волны  $\lambda'$ , испускаемой вперед, оказывается меньше, чем  $\lambda = uT$ , на расстояние  $v_{\text{ист.}}$ , проходимое источником за один период колебаний:

$$\lambda' = \lambda - v_{\text{ист.}}T = (u - v_{\text{ист.}})T = \frac{u - v_{\text{ист.}}}{\nu_{\text{ист.}}}.$$

Если находящийся впереди источника приемник сам движется в том же направлении со скоростью  $v_{\text{пр.}}$  относительно среды, то скорость волн относительно приемника равна  $u - v_{\text{пр.}}$ . Частота  $\nu_{\text{пр.}}$  регистрируемых колебаний равна отношению этой скорости к длине волны  $\lambda'$ :

$$\nu_{\text{пр.}} = \frac{u - v_{\text{пр.}}}{u - v_{\text{ист.}}} \nu_{\text{ист.}}. \quad (5.39)$$

Здесь предполагается, что источник и приемник движутся относительно среды в одном направлении, причем приемник находится впереди.

Если источник движется в противоположную от приемника сторону (влево на рис. 5.38), в формуле (5.39) нужно полагать  $v_{\text{ист.}} < 0$ . Если приемник движется в сторону источ-

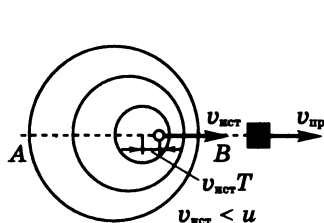


Рис. 5.38.  
Эффект Доплера

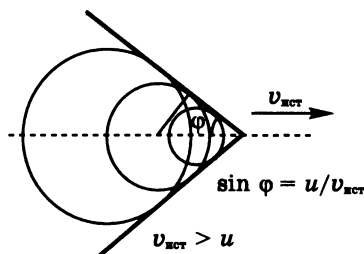


Рис. 5.39.  
Конус Маха

ника, нужно полагать  $v_{\text{пр.}} > 0$ . В любом случае при сближении источника и приемника (при уменьшении расстояния между ними)  $\nu_{\text{пр.}} > \nu_{\text{ист.}}$ , т. е. регистрируемая частота увеличена, а при удалении  $\nu_{\text{пр.}} < \nu_{\text{ист.}}$ , т. е. частота уменьшена. Но количественно случаи движения источника и приемника приводят к различным эффектам. Только при скоростях  $v_{\text{ист.}}$ ,  $v_{\text{пр.}}$ , малых по сравнению со скоростью волн  $u$ , это различие пропадает, и сдвиг частоты зависит лишь от относительной скорости источника и приемника  $v = v_{\text{ист.}} - v_{\text{пр.}}$ ; при  $v_{\text{пр.}}, v_{\text{ист.}} \ll u$

$$\nu_{\text{пр.}} = \frac{1 - v_{\text{пр.}}/u}{1 - v_{\text{ист.}}/u} \nu_{\text{ист.}} \approx \left(1 - \frac{v_{\text{пр.}}}{u}\right) \left(1 + \frac{v_{\text{ист.}}}{u}\right) \nu_{\text{ист.}} = \left(1 + \frac{v}{u}\right) \nu_{\text{ист.}}. \quad (5.40)$$

Для электромагнитных волн (света) в вакууме скорость во всех системах отсчета одинакова и сдвиг частоты в эффекте Доплера определяется только относительной скоростью источника и приемника.

Когда скорость источника больше скорости волн  $v_{\text{ист.}} > u$ , т. е. когда источник опережает создаваемые им волны, наложение испущенных в разные моменты времени волн образует конусообразный волновой фронт (рис. 5.39), движущийся со скоростью  $v_{\text{ист.}}$  вместе с находящимся в его вершине источником, — так называемый *конус Маха*. Угол  $\varphi$  между образующей конуса и его осью определяется отношением  $v_{\text{ист.}}/u = M$ , называемым *числом Маха*:

$$\sin \varphi = u/v_{\text{ист.}} = 1/M. \quad (5.41)$$

Конус Маха в виде скачка уплотнения образуется при движении любого тела (не обязательно источника периодических волн) в среде со скоростью, превышающей скорость волн.

Аналогом конуса Маха в оптике является *излучение Вавилова — Черенкова*, возникающее при движении заряженных частиц в среде со скоростью, превышающей скорость света в этой среде.

**12°.** Основные закономерности волновых процессов справедливы для волн любой физической природы, в том числе и для *электромагнитных волн*, т. е. для процесса распространения колебаний связанных между собой электрического и магнитного полей. В отличие от всех других видов волн, для существования которых необходима какая-либо среда, электромагнитные волны могут распространяться в вакууме. Возможность существования в вакууме электромагнитного поля без источников (зарядов и токов), имеющего вид волн, распространяющихся со скоростью  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458\text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8\text{ м/с}$ , вытекает из уравнений Максвелла — основных законов электродинамики (п. 4.6.3°).

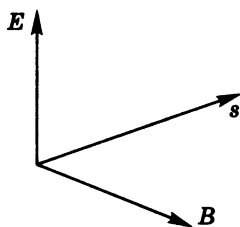


Рис. 5.40.

Взаимное расположение векторов  $E$ ,  $B$  и направления распространения  $s$  в электромагнитной волне

В бегущей электромагнитной волне векторы электрического и магнитного полей  $E$  и  $B$  в каждой точке пространства в данный момент времени перпендикулярны друг другу и перпендикулярны направлению распространения  $s$  (рис. 5.40). Это свойство волны называют *поперечностью*. Векторы  $E$ ,  $B$ ,  $s$  в каждой точке образуют правый винт (подобно ортам  $i$ ,  $j$ ,  $k$  правой системы координат

см. п. М8.3.3°). Модули векторов  $E$  и  $B$  в одной точке в любой момент пропорциональны друг другу:

$$B = E/c. \quad (5.42)$$

Ортогональность векторов  $E$  и  $B$  электромагнитной волны, как и соотношение (5.42) между их мгновенными значениями в каждой пространственно-временной точке, выполняются сразу во всех инерциальных системах отсчета. Это видно из выражений (4.115) для инвариантов электромагнитного поля (п. 4.6.2°).

Мгновенная картина векторов электрического и магнитного полей в разных точках вдоль линии распространения мо-

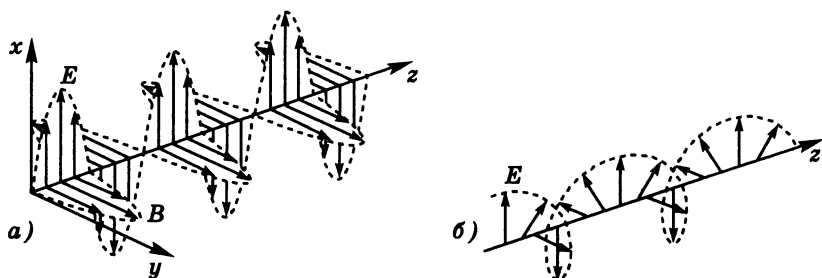


Рис. 5.41.

Электромагнитные волны линейной (а) и круговой (б) поляризации

монохроматической плоской волны показана на рис. 5.41. Если вектор  $E$  в данной точке при прохождении волны совершает колебания вдоль определенного направления, волну называют *линейно поляризованной* (рис. 5.41, а), если вектор  $E$  в данной точке, оставаясь неизменным по модулю, вращается вокруг направления распространения, волну называют *циркулярно поляризованной* или поляризованной по кругу (рис. 5.41, б). Волну круговой поляризации можно представить как сумму (наложение) двух волн одинаковой амплитуды, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях и сдвинутых по фазе на  $\pi/2$  (т. е. на четверть длины волны).

Плотность энергии электрического поля  $w_e = \epsilon_0 E^2/2$  в бегущей волне равна плотности энергии магнитного поля  $w_m = B^2/2\mu_0$ , так как  $B$  и  $E$  связаны соотношением (5.42). *Плотность потока энергии  $S$*  (т. е. энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения) равна произведению плотности энергии  $w = w_e + w_m$  на скорость волны  $c$ :

$$S = c(w_e + w_m) = 2cw_e = c\epsilon_0 E^2. \quad (5.43)$$

В монохроматической волне  $E(z, t) = E_0 \cos \omega(t - z/c)$  и среднее за период значение  $S$  равно  $\langle S \rangle = c\epsilon_0 E_0^2/2$  (так как  $\langle \cos^2 \omega(t - z/c) \rangle = 1/2$ ).

Электромагнитное поле волны переносит не только энергию, но и импульс. Объемная плотность импульса поля рав-

на  $w/c$ . Импульс, передаваемый волной единичной поглощающей площадке,— это *давление*  $p$  электромагнитной волны:  $p = w$  — давление равно объемной плотности энергии в падающей волне. При нормальном падении на идеально отражающую площадку давление в два раза больше:  $p = 2w$ .

*Излучение* электромагнитных волн происходит при *ускоренном движении* электрических зарядов. Если заряд  $Q$  осциллирует вдоль оси  $z$  так, что его координата изменяется по закону  $z(t) = z_0 \cos \omega t$  (рис. 5.42), то напряженность электрического поля в точке  $P$ , отстоящей на расстояние  $r$  от заряда, и направление на которую составляет угол  $\theta$  с осью  $z$ ,

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qa(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\omega^2 z_0 \cos \omega(t - r/c)}{c^2 r} \sin \theta, \quad (5.44)$$

пропорциональна ускорению заряда  $a$  в предшествующий момент времени  $t - r/c$ . Испускаемая осциллятором волна — сферическая, и амплитуда напряженности поля в ней убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$  от источника. Волна поляризована линейно, причем направления колебаний векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  зависят от положения точки  $P$  (рис. 5.42). Средняя по времени плотность потока энергии в такой волне

$$\langle S \rangle = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2\omega^4 z_0^2}{c^3 r^2} \sin^2 \theta. \quad (5.45)$$

Излучаемая осциллятором энергия пропорциональна *квадрату амплитуды* его колебаний  $z_0$  и *четвертой степени частоты*  $\omega$ . Плотность потока энергии обратно пропорциональна  $r^2$ , поэтому полный поток энергии через окружающую источник сферу не зависит от ее радиуса. Это согласуется с законом сохранения энергии: вся излучаемая энергия переносится волной все дальше от источника. Но плотность потока энергии зависит от его направления (от угла  $\theta$ , см. рис. 5.42): в направлении, вдоль которого происходят колебания заряда, энергия совсем не излучается ( $\sin \theta = 0$  при  $\theta = 0$  или  $\pi$ ).

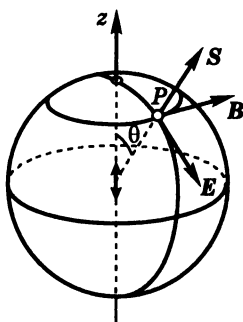


Рис. 5.42.

Векторы  $E$  и  $B$  в точке  $P$  для волны, излучаемой осциллирующим вдоль оси  $z$  зарядом

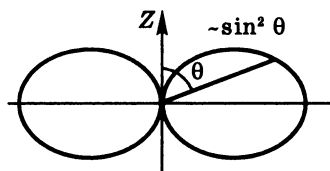


Рис. 5.43.

Угловое распределение энергии, излучаемой осциллятором

Угловое распределение излучаемой энергии показано на рис. 5.43 (длина радиального отрезка до пересечения с кривой пропорциональна  $\sin^2 \theta$ , т. е. излучаемой в данном направлении энергии). В пространстве распределение энергии по направлениям характеризуется поверхностью, которая получается вращением этой кривой вокруг оси  $z$ . Выражения (5.44) и (5.45) справедливы для расстояний  $r$ , больших по сравнению с длиной волны  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$  (в так называемой волновой зоне). Каждый небольшой участок сферической волны локально можно рассматривать как плоскую волну с определенными амплитудой, направлением распространения и поляризацией.

**13°. Волны на воде** имеют узкие острые гребни и широкие плоские впадины. Их профиль (рис. 5.44, а) заметно отличается от синусоидального. Такая форма волн обусловлена круговыми траекториями частиц жидкости (рис. 5.44, б), т. е. волны на поверхности не являются ни поперечными, ни продольными. Диаметры круговых траекторий быстро (экспоненциально) уменьшаются с глубиной, так что в движение

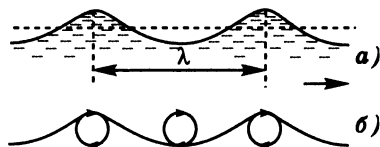


Рис. 5.44.

Волны на воде: а — профиль; б — траектории частиц

Диаметры круговых траекторий быстро (экспоненциально) уменьшаются с глубиной, так что в движение



оказывается вовлеченной жидкость в приповерхностном слое толщиной порядка длины волны.

При отклонении формы поверхности от равновесной (плоской) возникают восстанавливающие силы, обусловленные тяготением и поверхностным натяжением. Относительная роль этих факторов зависит от длины волны: у достаточно коротких волн преобладают силы поверхностного натяжения (*капиллярные волны*); в случае длинных (более 5 см) волн преобладают силы тяжести (гравитационные или *тяжелые волны*).

Скорость волн на воде зависит от длины волны  $\lambda$ , т. е. для них существует дисперсия. Скорость капиллярных волн

$$u_k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad (5.46)$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\rho$  — плотность жидкости. Зависимость  $u_k$  от  $\sigma$ ,  $\rho$  и  $\lambda$  можно найти методом размерностей (п. 1.3.5°). Скорость тяжелых волн

$$u_r = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (h \gtrsim \lambda). \quad (5.47)$$

Это выражение применимо, когда глубина больше длины волны ( $h \gtrsim \lambda$ ). В предельном случае малой глубины ( $h \ll \lambda$ ) скорость волн не зависит от длины волны:

$$u_r = \sqrt{gh} \quad (h \ll \lambda), \quad (5.48)$$

т. е. скорость предельно длинных волн тем больше, чем глубже водоем. Для волн длиной 1—2 см в равной мере важны и силы поверхностного натяжения, и силы тяжести. Скорость таких волн

$$u = \sqrt{u_k^2 + u_r^2} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (5.49)$$

На рис. 5.45 показаны зависимости скорости капиллярных и тяжелых волн от  $\sqrt{\lambda}$ . Минимум скорости соответствует длине волны  $\lambda_0 = 1,73$  см. Волны такой длины распространяются со скоростью 23,2 см/с. При  $\lambda < \lambda_0$  волны имеют преимуще-

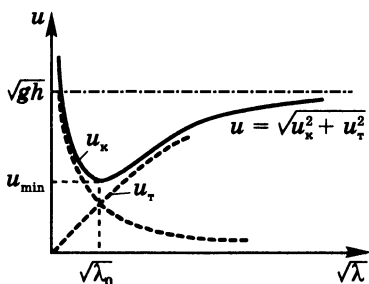


Рис. 5.45.

Скорость волн на поверхности воды

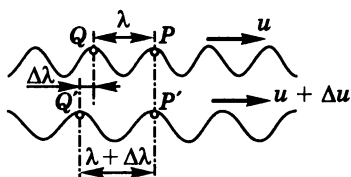


Рис. 5.46.

К определению групповой скорости волн

ственно капиллярный характер, при  $\lambda > \lambda_0$  — гравитационный. С увеличением длины волны скорость тяжелых волн растет пропорционально  $\sqrt{\lambda}$ . Этот рост замедляется, когда длина волны  $\lambda$  становится больше глубины  $h$  водоема. Поэтому максимально возможная скорость тяжелых волн определяется глубиной  $h$ :  $u_{\max} = \sqrt{gh}$ . В океане при глубинах  $h \approx 5$  км скорость волн цунами (длиной  $\lambda > h$ )  $u_{\max} \approx 200$  м/с (т. е. примерно 700 км/ч).

14°. В тех случаях, когда скорость монохроматических волн не зависит от длины волны, т. е. когда отсутствует дисперсия (упругие волны, электромагнитные волны в вакууме), возмущения любого вида распространяются с той же скоростью, не изменяя свою форму. При наличии дисперсии одиночные импульсы и волновые пакеты (см. рис. 5.31, а, б) при распространении, вообще говоря, изменяют свою форму. Но в определенных условиях (слабая дисперсия среды, достаточно длинный волновой пакет) огибающая волнового пакета сохраняет свою форму (при распространении на ограниченное расстояние) и можно ввести *групповую скорость волн*, понимая под этим скорость перемещения такой огибающей.

Представление о движении волнового пакета можно получить, рассматривая волну, образующуюся при сложении двух монохроматических волн с близкими длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  (рис. 5.46). В том месте, где горб одной из них совпадает

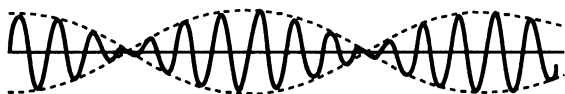


Рис. 5.47.  
Группы волн

с горбом другой, результирующая волна имеет горб удвоенной высоты. Там, где горб одной волны совпадает с впадиной другой, в результирующей волне смещение равно нулю. Вся волна представляет собой последовательность волновых пакетов или *волновых групп* (рис. 5.47). При отсутствии дисперсии скорости складываемых монохроматических волн одинаковы и результирующая волна перемещается с той же скоростью, не изменяя своей формы. В среде с дисперсией скорости складываемых волн несколько различаются, и взаимное расположение их горбов меняется со временем. Поэтому центры волновых групп движутся с иной скоростью  $u_{гр}$ , нежели отдельные горбы и впадины. Если в какой-то момент максимум огибающей, т. е. центр группы, находился в точке  $P$  (рис. 5.46), то через некоторое время  $\tau = \Delta\lambda/\Delta u$  горб  $Q'$  догонит  $Q$  и центр группы сместится назад на одну длину волны  $\lambda$ . Отсюда скорость движения центра группы

$$u_{гр} = u - \frac{\lambda}{\tau} \approx u - \lambda \frac{du}{d\lambda} \quad (5.50)$$

(формула Рэлея). Например, для тяжелых волн на воде  $u_{\tau}(\lambda) = C\sqrt{\lambda}$  (см. (5.47)),  $du_{\tau}/d\lambda = C\lambda^{-1/2} = u_{\tau}/2\lambda$  и формула (5.50) дает  $u_{гр} = u_{\tau}/2$  — центр группы перемещается с вдвое меньшей скоростью, чем отдельные горбы и впадины. В случае капиллярных волн  $u_{\kappa}(\lambda) = C'\sqrt{\lambda}$  (см. (5.46)) и расчет по формуле Рэлея (5.50) дает  $u_{гр} = 3u_{\kappa}/2$  — центр группы перемещается в полтора раза быстрее, чем отдельные гребни.

Формула Рэлея (5.50) применима не только к волновым группам (рис. 5.47), получающимся при сложении двух монохроматических волн, но и к одиночным волновым пакетам

(рис. 5.31, б), если такие пакеты не расплываются (т. е. сохраняют форму огибающей) при распространении. Любой пакет можно разложить на сумму бесконечного числа монохроматических составляющих, частоты которых заполняют некоторый интервал  $\Delta\nu$ . Длительность  $\Delta t$  волнового пакета связана с этим интервалом частот  $\Delta\nu$  соотношением

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx 1, \quad (5.51)$$

т. е. чем уже интервал частот (и соответственно длин волн) монохроматических составляющих волнового пакета, тем больше длительность и пространственная протяженность пакета (п. 7.4.1°). Пакет почти не расплывается при распространении на ограниченное расстояние, если групповая скорость (5.50) приблизительно постоянна в пределах соответствующего этому пакету интервала длин волн  $\Delta\lambda$ .

Непериодическое внешнее воздействие (например, брошенный в воду камень) порождает одиночный волновой импульс. В среде с дисперсией входящие в его состав монохроматические составляющие имеют существенно различные скорости, т. е. как бы «идут не в ногу», и одиночный импульс по мере распространения превращается в протяженный волновой процесс. На воде длинные волны уходят все дальше вперед, оставляя позади более короткие волны. Для такого волнового процесса с непрерывно меняющейся формой понятие групповой скорости, разумеется, неприменимо.

В нелинейной среде расплывание волнового пакета, обусловленное дисперсией, при определенных условиях может быть скомпенсировано эффектами нелинейности, приводящими к зависимости скорости и формы волны от ее амплитуды. В результате в такой среде оказывается возможным распространение уединенных волн определенной формы, называемых *солитонами*. Солитоны возможны в самых разнообразных средах — на воде, в кристаллах, магнитных материалах, сверхпроводниках и даже в живых организмах. Во многих отношениях солитоны ведут себя подобно частицам.

## 6. ОПТИКА

*Оптика* — учение о физических явлениях, связанных с распространением электромагнитных волн *оптического диапазона*, длины которых заключены в интервале от нескольких нанометров до десятых долей миллиметра (диапазон частот  $3 \cdot 10^{11}$ – $3 \cdot 10^{17}$  Гц), и взаимодействием этих волн с веществом. Эти границы условны и определяются используемыми способами получения и регистрации излучения. Кроме *видимого света*, длины волн которого лежат в интервале от 400 нм (фиолетовый свет) до 760 нм (красный свет), оптический диапазон включает *ультрафиолетовое* и *инфракрасное* излучение. Оптический диапазон примыкает с одной стороны к рентгеновскому излучению, с другой — к микроволновому радиоизлучению.

Оптическое излучение распространяется в вакууме со скоростью  $c \approx 2,99792458 \cdot 10^8$  м/с, одинаковой для всех длин волн.

### 6.1. Геометрическая оптика

1°. *Геометрическая оптика* использует представление о *световых лучах*, распространяющихся независимо друг от друга, прямолинейных в оптически однородной среде, преломляющихся и отражающихся на границах сред с различными оптическими свойствами. Вдоль лучей происходит перенос энергии световых колебаний. В изотропной среде лучи ортогональны волновым поверхностям.

Оптические свойства прозрачной среды характеризуются *показателем преломления*  $n$ , определяющим фазовую скорость световых волн  $v = c/n$ . Показатель преломления зависит от длины волны  $\lambda$  (или от частоты  $\omega$ ):  $n = n(\lambda)$ . Эту зависимость называют *законом дисперсии* света (п. 5.7.13°). Показатель преломления связан с диэлектрической проницаемостью среды  $\epsilon$  (для данной частоты) соотношением  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Среда с большим показателем преломления называется *оптически более плотной*. Показатели преломления некоторых прозрачных сред приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

## Показатель преломления некоторых прозрачных сред

Вещество	Длина волны, м			$\Delta n$ (синий — красный)*
	$4,4 \cdot 10^{-7}$ (синий)	$5,89 \cdot 10^{-7}$ (желтый)	$6,6 \cdot 10^{-7}$ (красный)	
Воздух	1,000296	1,000293	1,000291	0,000005
Вода	1,340	1,333	1,331	0,009
Этиловый спирт	1,370	1,362	1,360	0,010
Плавленный кварц	1,470	1,458	1,455	0,015
Стекло крон цинковый	1,528	1,517	1,513	0,015
Стекло легкий флинт	1,594	1,575	1,570	0,024
Стекло тяжелый флинт (свинцовый хрусталь)	1,945	1,890	1,875	0,070
Алмаз	2,465		2,407	0,058
*Величина $\Delta n = n_c - n_k$ (синий — красный) служит мерой дисперсии вещества. Преломление белого света в алмазе или свинцовом стекле приводит к образованию широких цветных спектров. Призма из воды не даст широкого спектра.				

Поведение лучей подчиняется *основным законам* геометрической оптики:

1) в однородной среде световые лучи *прямолинейны* (закон *прямолинейного распространения света*);

2) на границе двух сред (или на границе среды с вакуумом) возникает *отраженный луч*, лежащий в плоскости, образуемой падающим лучом и нормалью к границе, т. е. в *плоскости падения*, причем *угол отражения  $\varphi_1$  равен углу падения  $\varphi$*  (рис. 6.1):

$$\varphi_1 = \varphi \quad (6.1)$$

(закон *отражения света*);

3) *преломленный луч* лежит в плоскости падения (при падении света на границу изотропной среды) и образует с нор-

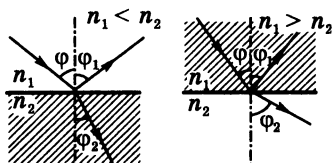


Рис. 6.1.

Отражение и преломление на границе двух сред:  $\varphi$  — угол падения,  $\varphi_1$  — угол отражения,  $\varphi_2$  — угол преломления

малью к границе угол  $\varphi_2$  (угол преломления), определяемый соотношением

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad (6.2)$$

(закон преломления света или закон Снеллиуса).

Законы отражения и преломления справедливы и для искривленных (например, сферических) поверхностей. В этом случае нормаль в разных точках поверхности имеет различные направления.

При переходе света в оптически более плотную среду ( $n_2 > n_1$ ) луч приближается к нормали ( $\varphi_2 < \varphi_1$ ). Отношение  $n_2/n_1 = n_{12}$  называют *относительным показателем преломления* двух сред. При падении света из вакуума на границу среды с показателем преломления  $n$  закон преломления принимает вид

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n. \quad (6.3)$$

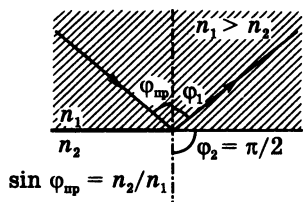


Рис. 6.2.

Предельный угол  
полного отражения

Для воздуха показатель преломления близок к единице ( $n_{\text{в}} = 1,0003$ ), поэтому и при падении света из воздуха на некоторую среду можно пользоваться формулой (6.3).

При переходе света в оптически менее плотную среду ( $n_2 < n_1$ ) угол падения не может превышать предельного значения  $\varphi_{\text{сп}}$ , так как угол преломления  $\varphi_2$  не может превышать  $\pi/2$  (рис. 6.2):

$$\sin \varphi_{\text{сп}} = n_2/n_1 \quad (n_2 < n_1). \quad (6.4)$$

Если угол падения  $\varphi > \varphi_{\text{сп}}$ , происходит *полное* отражение, т. е. вся энергия падающего света возвращается в первую, оп-

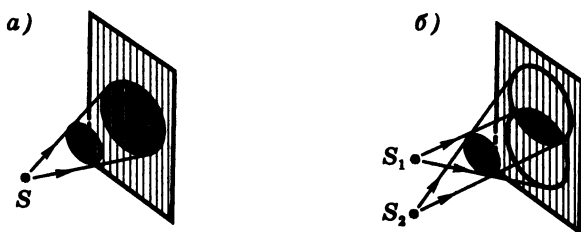


Рис. 6.3.  
Тень (а) и полутень (б)

тически более плотную, среду. Для границы стекло — воздух ( $n_1/n_2 = 1,5$ )  $\varphi_{\text{пр}} = 41^\circ 50'$ .

Законы геометрической оптики были установлены на опыте задолго до выяснения природы света. Эти законы могут быть выведены из волновой теории на основе принципа Гюйгенса (п. 5.7.7°). Их применимость ограничена явлениями дифракции (§ 6.4).

Прямолинейность распространения света приводит к образованию *тени*, т. е. области, в которую свет не проникает. В случае *точечного источника* (светящейся точки) препятствие создает резко очерченную тень (рис. 6.3, а). Граница тени несколько размыта только из-за дифракции (§ 6.4). В случае двух и более источников, а также в случае *протяженного источника* переход от полной тени к освещенной области происходит через область *полутени* (рис. 6.3, б). При больших размерах источника (пасмурное небо) полная тень может вообще отсутствовать.

**2°.** Пучок лучей, проходящих через одну точку, называется *гомоцентрическим* (рис. 6.4). В *астигматических* пучках (рис. 6.5) лучи, лежащие в двух взаимно перпендикулярных осевых сечениях, пересекаются в разных местах — по двум отрезкам, смещенным вдоль пучка на некоторое расстояние.

Ортогональные к лучам волновые поверхности астигматического пучка имеют двойную кривизну ( $R_1$  и  $R_2$  на рис. 6.5, см. § М9.7) в отличие от гомоцентрических пучков со сферическими волновыми поверхностями.



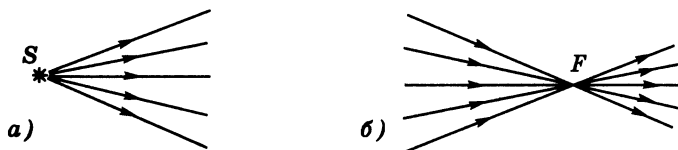


Рис. 6.4.

Расходящийся (а) и сходящийся (б) гомоцентрические пучки

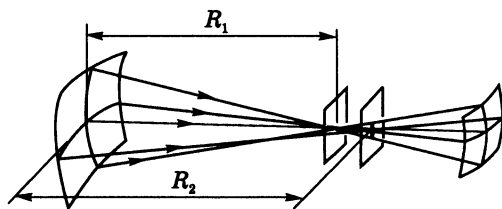


Рис. 6.5.

Астигматический пучок лучей

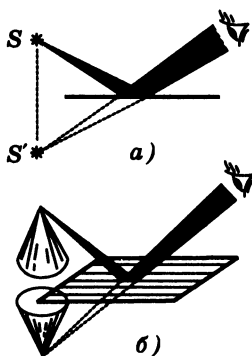


Рис. 6.6.

Плоское зеркало

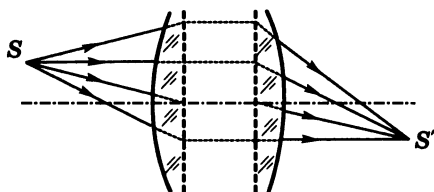


Рис. 6.7.

Образование изображения  
в оптической системе

При отражении в *плоском зеркале* лучи изменяют направление, но гомоцентричность пучков сохраняется (рис. 6.6, а). Наблюдателю кажется, что отраженные от зеркала лучи выходят из точки  $S'$ , расположенной за зеркалом *симметрично* точке  $S$ . Создаваемое плоским зеркалом *изображение*  $S'$  точечного источника  $S$  называется *мнимым*, так как в точке  $S'$  пересекаются не сами отраженные лучи, а их продолжения на-

зад. Изображение протяженного предмета (рис. 6.6, б) будет резким и равным по размерам самому предмету.

Гомоцентрические пучки света, выходящие из отдельных точек предмета, после отражения и преломления, как правило, утрачивают гомоцентричность и становятся астигматическими (исключение составляет отражение в плоском зеркале). Приблизленно гомоцентричность сохраняется в важном для практики случае пучков параксиальных лучей в *центрированных оптических системах* (т. е. в системах, образованных сферическими преломляющими и отражающими поверхностями, центры которых лежат на одной прямой, называемой *оптической осью*). Пучки лучей называют *параксиальными*, если лучи образуют малые углы с оптической осью и пересекают поверхности на расстояниях от оси, малых по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. Проходя через оптическую систему, параксиальные пучки от разных точек предмета формируют его *оптическое изображение*, так что каждой точке  $S$  предмета соответствует определенная точка  $S'$  изображения (рис. 6.7).

**3°. Падающий на вогнутое сферическое зеркало параллельный пучок лучей после отражения собирается в фокусе  $F$**  (рис. 6.8, а). Фокус находится в середине отрезка  $OP$ , соединяющего центр  $O$  поверхности зеркала (*оптический центр*) и вершину  $P$  зеркала (*полюс*). *Фокусное расстояние зеркала*  $f = R/2$ , где  $R$  — радиус кривизны зеркала.

Для построения изображения произвольной точки  $A$  удобно использовать следующие лучи (рис. 6.8, б):

- 1) луч  $AOB$ , проходящий через оптический центр  $O$ ; отраженный луч идет вдоль той же прямой назад;
- 2) луч  $AFD$ , проходящий через фокус  $F$ ; отраженный луч параллелен оптической оси;
- 3) луч  $AC$ , параллельный оптической оси; отраженный луч проходит через фокус  $F$ ;
- 4) луч  $AP$ , падающий на полюс зеркала; отраженный луч симметричен падающему относительно оптической оси  $OP$ .

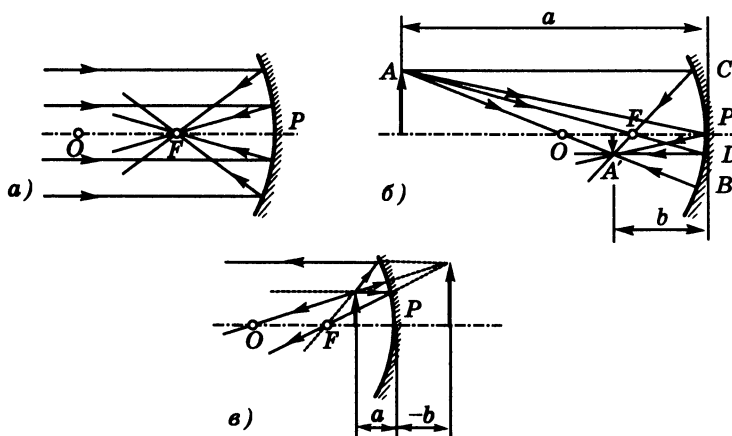


Рис. 6.8.  
Вогнутое зеркало

Формула зеркала:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (6.5)$$

где  $a$  и  $b$  — расстояния от зеркала до предмета и изображения,  $f = R/2$  — фокусное расстояние зеркала.

Когда предмет находится на расстояниях от  $\infty$  до  $f$ , изображение действительное перевернутое. Изображение предмета, расположенного ближе фокуса, мнимое прямое увеличенное. Оно находится за зеркалом (рис. 6.8, в). Формула (6.5) справедлива и в этом случае, если в ней расстояние  $b$  до мнимого изображения полагать отрицательным ( $b < 0$ ).

Падающий на *выпуклое зеркало* параллельный пучок лучей отражается так, будто все лучи выходят из фокуса  $F$  (рис. 6.9), находящегося за зеркалом на расстоянии  $R/2$ . При любом расположении предмета его изображение в выпуклом зеркале мнимое прямое уменьшенное и находится за зеркалом (ближе фокуса).

Для построения изображения используют лучи, аналогичные перечисленным для вогнутого зеркала. Формула (6.5) справедлива и для выпуклого зеркала, если его фокусное расстояние полагать отрицательным ( $f = -R/2$ ).

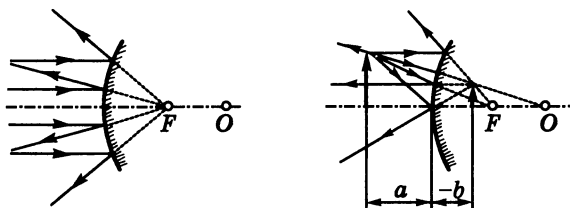


Рис. 6.9.  
Выпуклое зеркало

4°. Главной оптической осью линзы называют прямую, проходящую через центры кривизны сферических поверхностей, ограничивающих линзу. Собирающие линзы в середине толще, чем по краям, рассеивающие — наоборот, в середине тоньше (рис. 6.10), когда показатель преломления материала линзы больше, чем окружающей среды. Линзу называют *тонкой*, когда ее толщина пренебрежимо мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей и с расстоянием от предмета до линзы. При этом точки пересечения сферических поверхностей линзы с оптической осью (рис. 6.11, а) расположены настолько близко, что их принимают за одну точку  $O$ , называемую *оптическим центром* линзы.

Падающий на собирающую линзу пучок лучей, параллельных оптической оси, собирается в *фокусе линзы*  $F$  (рис. 6.11, а). Фокусное расстояние линзы  $f$  зависит от радиусов кривизны  $R_1$  и  $R_2$  ее преломляющих поверхностей и показателя преломления  $n$  материала линзы. Для двояковыпуклой линзы  $f$  рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.6)$$

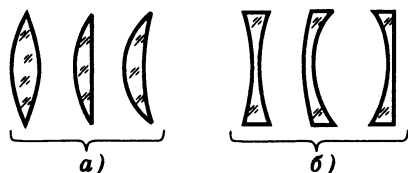


Рис. 6.10.  
Линзы: а — собирающие;  
б — рассеивающие

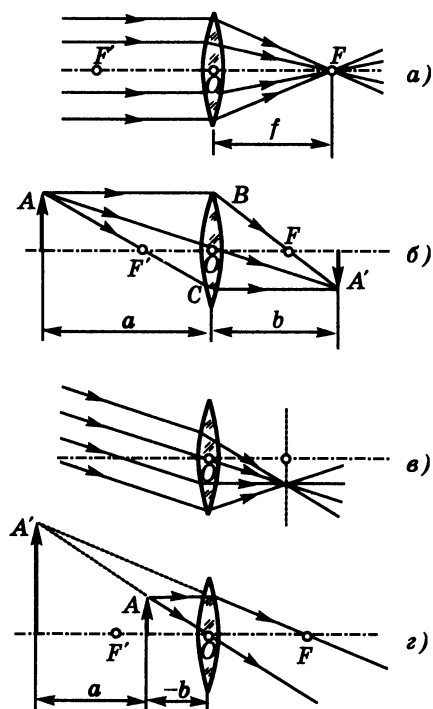


Рис. 6.11.

Собирающая линза

Предполагается, что линза находится в среде с показателем преломления, равным единице (вакуум, воздух). Показатели преломления  $n$  для некоторых прозрачных сред приведены в п. 6.1.1°. Если одна из поверхностей плоская, ее радиус кривизны  $R = \infty$ . Для выпукловогнутой линзы радиус  $R_2$  вогнутой поверхности в формуле (6.6) следует полагать отрицательным ( $R_2 < 0$ ). Величину, обратную фокусному расстоянию, называют *оптической силой линзы*:

$$D = 1/f.$$

Оптическую силу выражают в *диоптриях* (дптр). Линза

в 1 дптр имеет фокусное расстояние 1 м.

Если пучок лучей, параллельных оптической оси, направить на линзу с противоположной стороны, он соберется в точке  $F'$ . Точки  $F$  и  $F'$  находятся на одинаковом расстоянии  $f$  от линзы, если по обе стороны линзы одна и та же среда.

Для построения изображения удобно использовать следующие лучи (рис. 6.11, б):

1) луч  $AO$ , проходящий через оптический центр линзы без преломления;

2) луч  $AB$ , параллельный оптической оси; после преломления он проходит через фокус  $F$ ;

3) луч  $AF'C$ , проходящий через передний фокус  $F'$ ; после преломления параллелен оптической оси.

Параллельный пучок лучей, падающий на линзу под углом к оптической оси, собирается в точке, лежащей в *фокальной плоскости* линзы (рис. 6.11, в).

*Формула линзы:*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (6.7)$$

где  $a$  и  $b$  — расстояния от линзы до предмета и изображения.

Если расстояние до предмета больше фокусного расстояния линзы ( $a > f$ ), то изображение действительное перевернутое и расположено по другую сторону линзы (рис. 6.11, б). Изображение уменьшенное при  $a > 2f$  и увеличенное при  $2f > a > f$ . Если расстояние до предмета меньше фокусного расстояния, изображение мнимое прямое увеличенное и расположено с той же стороны от линзы, что и предмет (рис. 6.11, г). Формула (6.7) справедлива и для мнимого изображения, если расстояние до него полагать отрицательным.

Падающий на *рассеивающую* линзу пучок лучей, параллельных оптической оси, после преломления расходится так, как если бы лучи выходили из фокуса  $F$ , лежащего перед линзой (рис. 6.12, а).

Изображение, которое образуется рассеивающей линзой, при любом положении предмета мнимое прямое уменьшенное (рис. 6.12, б). Фокусное расстояние  $f$  рассеивающей линзы вычисляется по той же формуле (6.6). Радиусы кривизны вогнутых поверхностей подставляются в формулу со знаком минус,

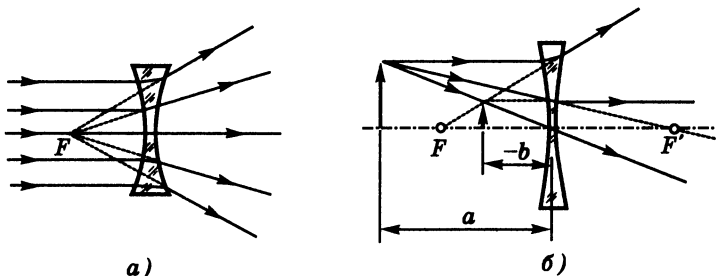


Рис. 6.12.  
Рассеивающая линза

и, таким образом, для рассеивающей линзы получается  $f < 0$ . Оптическая сила  $D = 1/f$  также будет отрицательна. Положение изображения  $b$  находится по формуле (6.7). Так как  $f < 0$ , она дает  $b < 0$ , т. е. мнимое изображение расположено с той же стороны от линзы, что и предмет.

## 6.2. Оптические приборы

1°. Изображение фотографируемых предметов в *фотоаппарате* (действительное перевернутое, обычно уменьшенное) создается *объективом* (рис. 6.13). Одиночной линзе присущи хроматическая и сферическая aberrации, астигматизм и другие недостатки, поэтому объектив представляет собой многолинзовую собирающую систему, в которой исправлены те или иные aberrации. Поверхности линз покрыты *просветляющим слоем*, уменьшающим потери света из-за отражений. Действие слоя основано на явлении интерференции света (п. 6.3.6°).

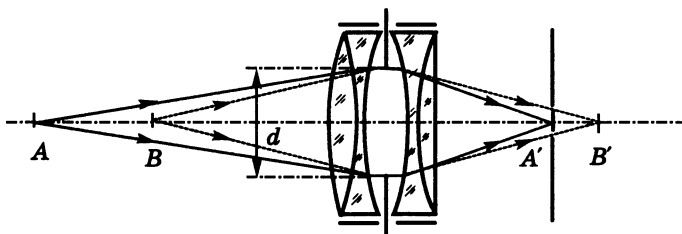


Рис. 6.13.  
Фотоаппарат

В плоскости фотопленки (светочувствительной матрицы в цифровых камерах) получают резкие изображения предметов, находящихся на определенном расстоянии от камеры (точка  $A$  на рис. 6.13). *Наводка на резкость* производится перемещением объектива. Изображения точек, не лежащих в плоскости наводки (точка  $B$  на рис. 6.13), получают в виде *кружков рассеяния*. Размер этих кружков уменьшается при *диафрагмировании* объектива (т. е. при уменьшении относительного отверстия  $d/f$ ), что приводит к увеличению *глубины резкости*.

Однако при диафрагмировании уменьшается световой поток, участвующий в формировании изображения, что требует увеличения *выдержки* для нормального экспонирования пленки. Наибольшее относительное отверстие  $d_{\max}/f$  (при полностью открытой диафрагме) определяет *светосилу* объектива. Светосила равна *квадрату* отношения  $d_{\max}/f$ .

2°. В *проекционном аппарате* предмет (диапозитив  $D$ ) помещают на расстоянии  $a$  от  $f$  до  $2f$  (от объектива), так что на экране  $\mathcal{E}$  создается действительное увеличенное перевернутое изображение (рис. 6.14). Линейное увеличение

$$\gamma = \frac{b}{f} - 1 \approx \frac{b}{f} \quad (6.8)$$

растет с увеличением расстояния  $b$  до экрана. Увеличение тем больше, чем меньше фокусное расстояние  $f$  объектива.

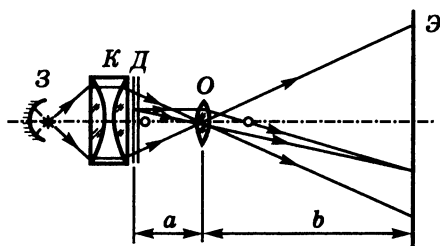


Рис. 6.14.  
Проекционный аппарат

Конденсор  $K$  и зеркало  $З$  служат для концентрации светового потока от источника в объектив. Конденсор рассчитывается так, чтобы создаваемое им действительное изображение светящегося тела источника находилось в отверстии объектива. Источник помещен в центр кривизны сферического зеркала.

3°. Размер изображения на сетчатке глаза зависит от угла, под которым виден предмет (рис. 6.15). Для увеличения *угла зрения* глаз приближают к

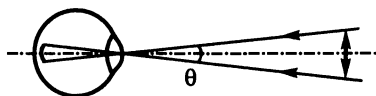


Рис. 6.15.  
Угол зрения

предмету, но такое приближение возможно только до *расстояния наилучшего зрения* ( $l_0 \approx 25$  см), так как при меньших расстояниях затруднена *аккомодация* глаза.



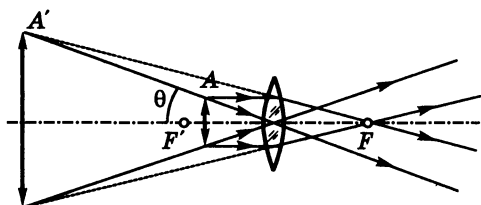


Рис. 6.16.  
Линза

Помещая перед глазом собирающую линзу (*лупу*), можно значительно приблизить предмет и тем самым *увеличить угол зрения*. Отношение угла зрения при наблюдении предмета через оптический прибор к углу зрения при наблюдении невооруженным глазом с расстояния наилучшего зрения называется *увеличением прибора*.

Предмет помещают перед лупой в ее фокусе или на расстоянии, немного меньшим фокусного ( $A$  на рис. 6.16). Изображение ( $A'$ ) мнимое прямое и расположено с той же стороны, что и предмет. Увеличение  $\Gamma$  приблизительно равно отношению расстояния наилучшего зрения  $l_0$  к фокусному расстоянию  $f$ :

$$\Gamma = l_0 / f. \quad (6.9)$$

Лупа с фокусным расстоянием 10 см дает увеличение  $2,5\times$ , с фокусным расстоянием 5 см — увеличение  $5\times$ .

4°. Оптическая система *микроскопа* (рис. 6.17) состоит из сложного многолинзового *объектива* с фокусным расстоянием  $f_1$  в несколько миллиметров и *окуляра* с фокусным расстоянием  $f_2$  в несколько сантиметров. Объектив создает действительное перевернутое увеличенное изображение  $A'B'$  предмета  $AB$ , расположенного непосредственно перед фокусом объектива. Промежуточное изображение  $A'B'$  рассматривается через окуляр, как через лупу (п. 6.2.3°). Для этого окуляр размещают так, чтобы изображение  $A'B'$  находилось в его фокальной плоскости (или на расстоянии, немного меньшем фокусного).

Увеличение объектива  $\Gamma_1 \approx b/a \approx l/f_1$ , где  $l$  — длина тубуса микроскопа ( $b \approx l$ , так как промежуточное изображение  $A'B'$  находится внутри тубуса перед окуляром,  $a \approx f_1$ ). Уве-

личение окуляра  $\Gamma_2 = l_0/f_2$  (как у лупы). Общее увеличение микроскопа

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{l l_0}{f_1 f_2}. \quad (6.10)$$

Для согласования оптической системы микроскопа с глазом наблюдателя фокусное расстояние окуляра  $f_2$  (при заданном фокусном расстоянии  $f_1$  объектива) должно быть выбрано так, чтобы диаметр  $d$  выходящего из окуляра параллельного пучка лучей, исходящих из некоторой точки предмета, был равен диаметру зрачка глаза  $d_0$  (или был в два-четыре раза меньше при наблюдении ярких предметов). Это условие налагает ограничение на допустимое увеличение микроскопа ( $\Gamma \lesssim 250\text{--}1000$ ).

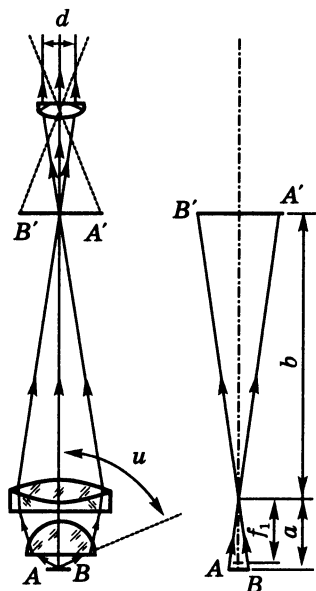


Рис. 6.17.  
Микроскоп

При больших увеличениях  $d$  становится меньше  $d_0$  и освещенность изображения на сетчатке глаза уменьшается.

Минимальный размер  $l_{\min}$  различимых в микроскоп деталей предмета обусловлен волновой природой света: изображение светящейся точки имеет вид дифракционного кружка (п. 6.4.4°). Размер  $l_{\min}$  зависит от *числовой апертуры*  $n \sin u$  объектива, где  $2u$  — угол раствора конуса исходящих от предмета лучей, улавливаемых объективом,  $n$  — показатель преломления среды, находящейся между предметом и объективом:

$$l_{\min} \approx \frac{\lambda}{n \sin u}, \quad (6.11)$$

где  $\lambda$  — длина волны света. В лучших объективах апертура близка к теоретическому пределу ( $2u = \pi$ ) и при  $n = 1$  размер  $l_{\min} \approx \lambda$ , т. е. для видимого света  $l_{\min} \approx 5 \cdot 10^{-5}$  см. Поэтому при увеличениях свыше  $1000\times$  не выявляются никакие новые детали предмета.

5°. Объектив *телескопа* (зрительной трубы) создает действительное уменьшенное перевернутое изображение удаленного предмета (рис. 6.18). Это изображение расположено в фокальной плоскости окуляра и рассматривается через окуляр, как через лупу. Фокальную плоскость окуляра обычно совмещают с фокальной плоскостью объектива; тогда падающий на объектив параллельный пучок лучей от какой-либо точки удаленного предмета выходит из окуляра также параллельным и наблюдение ведется ненапряженным (аккомодированным на бесконечность) глазом.

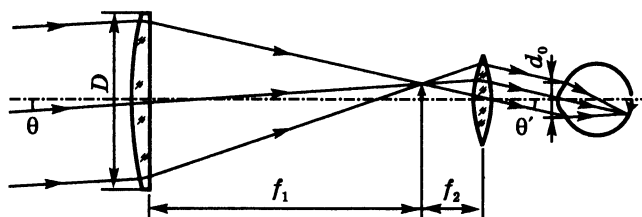


Рис. 6.18.  
Телескоп

*Увеличением*  $\Gamma$  телескопа называется отношение угла  $\theta'$ , под которым виден предмет в телескоп, к углу  $\theta$ , под которым этот предмет виден невооруженным глазом:

$$\Gamma = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1}{f_2}, \quad (6.12)$$

т. е. увеличение равно отношению фокусных расстояний объектива  $f_1$  и окуляра  $f_2$ . Для получения максимальной освещенности изображений протяженных предметов диаметр объектива  $D$  должен превосходить диаметр  $d_0$  зрачка глаза в  $\Gamma$  раз. Поэтому для данного объектива (с определенным диаметром) окуляр должен быть подобран так, чтобы общее увеличение  $\Gamma$  было равно  $D/d_0$  (нормальное увеличение).

В больших телескопах используют зеркальные объективы (телескопы-рефлекторы, в отличие от рефракторов с линзовыми объективами).

Теоретический *предел разрешения телескопа* (минимальное угловое расстояние  $\theta_{\min}$  между двумя удаленными точками, воспринимаемыми раздельно) определяется диаметром  $D$  его объектива (п. 6.4.4°):

$$\theta_{\min} \approx \lambda/D, \quad (6.13)$$

где  $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$  м — длина волны света.

Чтобы наблюдать неперевернутое изображение, в призмённых биноклях используют оборачивающую систему из призм внутреннего отражения.

### 6.3. Интерференция света

1°. В явлениях интерференции наиболее отчетливо обнаруживаются *волновые свойства* света. Интерференция характерна для волн любой природы и сравнительно легко наблюдается на опыте для звуковых волн или волн на поверхности воды. Но для наблюдения интерференции света необходимо выполнение определенных условий (см. ниже).

*Интерференция света* проявляется в том, что при наложении нескольких световых пучков результирующая интенсивность в одних местах больше суммарной, в других — меньше, т. е. возникают чередующиеся светлые и темные участки — *интерференционные полосы*.

В источнике света возбужденные атомы *спонтанно* испускают отдельные цуги электромагнитных волн, соотношения фаз между которыми имеют случайный характер. Длительность цугов не превышает  $10^{-8}$  с (протяженность менее 1 м) даже в случае узких спектральных линий излучения газоразрядных источников низкого давления. Поэтому излучение обычных (нелазерных) источников света представляет собой наложение огромного числа несогласованных между собой цугов волн, т. е. фактически «световой шум» — беспорядочные, *некогерентные* колебания электромагнитного поля. Только в *лазере*, где используется *вынужденное излучение*, все возбужденные атомы излучают согласованно, и в результате образуется

когерентная световая волна, близкая по своим свойствам к монохроматической.

Наблюдать интерференцию света от некогерентных источников можно, если разделить излучение на два или несколько пучков и затем свести эти пучки вместе. Хотя в каждом из пучков за время наблюдения фазовые соотношения между волновыми пучками хаотически изменяются, эти изменения одинаковы в разных пучках. Устойчивая интерференционная картина будет наблюдаться, если разность хода между пучками не превышает длины отдельного пучка.

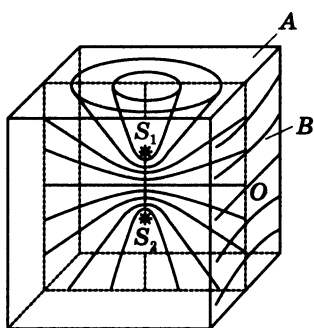


Рис. 6.19.

Форма  
интерференционных  
полос от двух точечных  
источников

2°. Способы разделения волны от первичного источника на две когерентные между собой волны можно разбить на две группы: *деление волнового фронта* (опыты Юнга и Френеля) и *деление амплитуды* (интерференция в тонких пленках и пластинках, кольца Ньютона, полосы равного наклона). В любом случае вместо первичного точечного источника можно рассматривать два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$ , находящихся на некотором расстоянии  $d$  (рис. 6.19). Для определения положения

и формы интерференционных полос излучение можно считать монохроматическим. В каждую точку приходят две волны, и амплитуда результирующих колебаний максимальна там, где *разность хода* от источников равна целому числу длин волн  $\lambda$ :

$$l_1 - l_2 = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.14)$$

Число  $n$  называется *порядком интерференции*.

В плоскости, содержащей источники, множество точек, разность расстояний до которых от источников  $S_1$  и  $S_2$  одинакова, представляет собой гиперболу (п. М9.3.3°). В пространстве множеству точек  $l_1 - l_2 = \text{const}$  соответствует поверх-

ность вращения гиперболы вокруг прямой, проходящей через  $S_1$  и  $S_2$  (гиперболоид вращения). Форма интерференционных полос на каком-либо экране дается линиями пересечения таких гиперболоидов с плоскостью экрана (рис. 6.19). В частности, на экране  $A$  это концентрические окружности, на экране  $B$  в окрестности точки  $O$  полосы практически можно считать эквидистантными (т. е. отстоящими на одинаковые расстояния друг от друга) параллельными прямыми.

3°. В *опыте Юнга* роль вторичных когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$  играют отверстия, освещаемые одним источником малого углового размера, либо свет от источника пропускается через малое отверстие  $S$  (рис. 6.20). В расширенном вследствие дифракции (п. 6.4.2°) световом пучке от  $S$  колебания в разных точках волнового фронта (в том числе в  $S_1$  и  $S_2$ ) когерентны, и на экране  $B$  наблюдается *интерференционная картина* в виде параллельных полос, ориентированных перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 6.20. В точке  $P$ , направление на которую образует угол  $\theta$  с направлением на центр  $O$  интерференционной картины, разность хода  $l_1 - l_2 \approx d \sin \theta \approx d\theta$ , где  $d$  — расстояние между отверстиями  $S_1$  и  $S_2$ . Полагая здесь  $l_1 - l_2$  равным целому числу длин волн  $n\lambda$ , получаем направление  $\theta_n$  на максимум (светлую полосу)  $n$ -го порядка:

$$\theta_n = n\lambda/d, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.15)$$

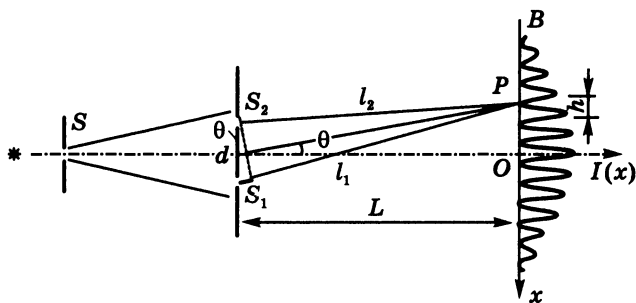


Рис. 6.20.  
Схема опыта Юнга

Угловое расстояние между соседними полосами  $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$  равно  $\lambda/d$ , а расстояние  $h$  между ними на экране  $B$  получается умножением  $\Delta\theta$  на расстояние  $L$ :

$$h = L\Delta\theta = \lambda L/d. \quad (6.16)$$

Например, при  $L = 1$  м,  $d = 0,5$  мм и  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м расстояние между полосами  $h \approx 1$  мм. Полосы тем шире, чем ближе друг к другу расположены отверстия и чем больше расстояние  $L$ . График освещенности экрана  $I(x)$  показан в правой части рис. 6.20. Вблизи центра картины  $I(x)$  имеет вид

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{h} x \right). \quad (6.17)$$

Освещенность в минимумах равна нулю, а в максимумах в четыре раза больше освещенности от одного источника. Ослабление световых колебаний в одних местах и усиление в других обусловлено перераспределением потока энергии в пространстве без каких-либо других энергетических превращений: согласно (6.17) среднее по экрану значение освещенности равно  $2I_0$ , т. е. удвоенной освещенности, создаваемой одним источником. Для увеличения освещенности наблюдаемой картины вместо точечных отверстий  $S$ ,  $S_1$  и  $S_2$  можно использовать узкие щели (параллельные между собой).

Две когерентные световые волны можно получить в результате *отражения света* от двух поверхностей плоскопараллельной прозрачной пластинки (или пленки), см. рис. 6.21. В каждую точку наблюдения приходят волны, разность хода которых будет такой же, как от источников  $S_1$  и  $S_2$  — изображений  $S$ , создаваемых верхней и нижней поверхностями. Интерференционные полосы на экране  $B$  имеют вид концентрических колец с центром в точке  $O$ . Расстояние между кольцами уменьшается при удалении от центра.

4°. У *протяженного источника* света каждый элемент можно рассматривать как точечный источник, излучение которого некогерентно с излучением других элементов источника. Интерференционные картины, создаваемые разными элемента-

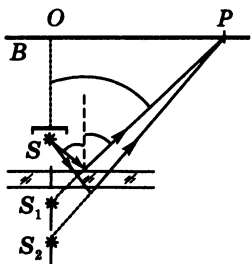


Рис. 6.21.

Интерференция света  
при отражении двумя  
параллельными плоскостями

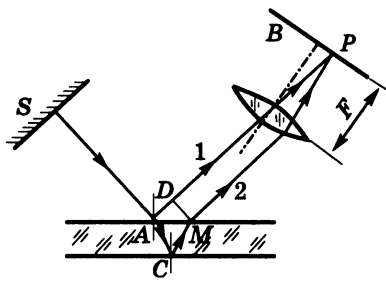


Рис. 6.22.

Наблюдение полос равного  
наклона

ми, просто налагаются (складываются), и если полосы в этих картинах смещены одна относительно другой, то результирующая картина оказывается размытой. Совпадение интерференционных полос в отдельных картинах будет только при определенных условиях наблюдения (или при расположении экрана в определенном месте), поэтому полосы интерференционной картины в случае протяженного источника оказываются *локализованными*.

*Полосы равного наклона* можно наблюдать в фокальной плоскости линзы, поставленной на пути света протяженного источника, отраженного двумя параллельными плоскостями (рис. 6.22). В каждую точку  $P$  экрана  $B$  приходят лучи, которые до линзы были параллельны друг другу, т. е. имели вполне определенный наклон к отражающим поверхностям. От точки  $A$  разделения лучей луч 2 проходит дополнительно расстояние  $|AC| + |CM|$  в пластинке, а в воздухе его путь меньше, чем у луча 1, на отрезок  $|AD|$ . Ясно, что разность хода лучей 1 и 2 не зависит от положения точки  $A$  падения первичного луча на пластинку и результат интерференции в точке  $P$  (максимум либо минимум) будет одинаковым для всех элементов протяженного источника. Интерференционные полосы имеют форму колец с центром в фокусе линзы. Полосы равного наклона наблюдают в *интерферометрах* — приборах для точных измерений малых перемещений, изменений показателя преломления, спектрального состава излучения и т. п.



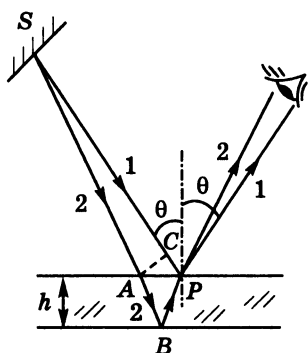


Рис. 6.23.  
Наблюдение полос  
равной толщины

от нижней поверхности пленки в точке  $B$ . Разность хода лучей 2 и 1 (для простоты пренебрегаем преломлением в пленке, т. е. считаем  $n = 1$ ) равна

$$l_2 - l_1 \approx |AB| + |BP| - |CP| = ah \cos \theta.$$

Так как в глаз попадают только те лучи из точки  $P$ , для которых угол  $\theta$  лежит в узком интервале значений, то разность хода практически одинакова для всех пар интерферирующих лучей, создающих изображение точки  $P$  на сетчатке глаза. Контур каждой интерференционной полосы проходит по тем местам пленки, где ее толщина  $h$  имеет одно и то же значение (при условии, что  $\cos \theta$  практически одинаков для всей области наблюдения).

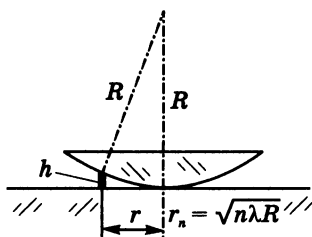


Рис. 6.24.  
Кольца Ньютона

Полосы равной толщины можно наблюдать в тонкой прослойке воздуха между поверхностями, например, стеклянной пластинки и линзы (кольца Ньютона, см. рис. 6.24). Когда направление наблюдения близко к нормали ( $\theta = 0$ ), переход от одного максимума к соседнему соответствует изменению толщины прослойки на половину длины волны. Центр колец (в точке касания)

темный, что обусловлено различием в условиях отражения: фаза волны, отражающейся от оптически более плотной среды, изменяется на противоположную. Радиус  $n$ -го темного кольца

$$r_n = \sqrt{n\lambda R}, \quad (6.18)$$

где  $R$  — радиус кривизны сферической поверхности линзы. Из-за зависимости  $r_n$  от длины волны кольца в белом свете имеют радужную окраску. Полосы равной толщины используют для интерференционного контроля качества оптических поверхностей.

5°. При интерференции *двух волн* возникает интерференционная картина, где освещенность изменяется по закону (6.17), т. е. светлые и темные полосы характеризуются одинаковой шириной. *Многолучевая интерференция* возникает при наложении многих когерентных волн, образующихся в результате деления волнового фронта на многих щелях (*дифракционная решетка*, см. п. 6.4.5°) или деления амплитуды при многократных отражениях от параллельных поверхностей (*интерферометр Фабри — Перо*). Для многолучевой интерференционной картины характерны резкие светлые полосы, ширина которых много меньше расстояния между ними. Это легко понять из энергетических соображений: при увеличении числа интерферирующих пучков в  $n$  раз общий световой поток также возрастает в  $n$  раз, но интенсивность в максимумах возникает в  $n^2$  раз, что возможно только при том условии, что их ширина одновременно уменьшается в  $n$  раз.

6°. Для уменьшения потерь света из-за отражений в оптических приборах поверхности линз покрываются тонким слоем прозрачного вещества с показателем преломления  $n'$ , меньшим показателя преломления стекла  $n \approx 1,5$  (*просветление оптики*). Чтобы волны, отраженные от поверхностей покрытия и линзы, в результате интерференции ослабляли друг друга, удвоенная толщина покрытия должна быть равна половине длины световой волны в его веществе (или нечетному числу полуволн). Для полного погашения их амплитуды должны быть одинаковы, что достигается при  $n' = \sqrt{n}$ .

## 6.4. Дифракция света

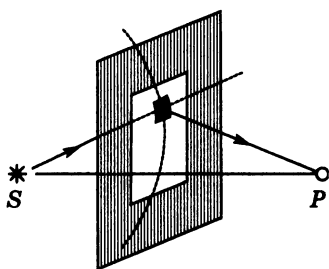


Рис. 6.25.  
К принципу  
Гюйгенса — Френеля

1°. Общее для всех волновых процессов явление *дифракции* имеет для света свои особенности, связанные с тем, что здесь, как правило, длина волны  $\lambda$  много меньше размеров  $d$  преград (или отверстий). Поэтому наблюдать дифракцию, т. е. отклонения распределения освещенности от простой картины, предсказываемой геометрической оптикой, можно только на достаточно больших расстояниях  $l$  от преграды ( $l \gtrsim d^2/\lambda$ ). Объяснение дифракционных явлений дает *принцип Гюйгенса — Френеля*, согласно которому любая точка волновой поверхности рассматривается как источник вторичных сферических волн, а световые колебания в некоторой точке  $P$  (рис. 6.25) находятся сложением колебаний, создаваемых приходящими в точку  $P$  вторичными волнами, с учетом их амплитуд и фаз. В результате может получиться темная область там, где пролегает прямолинейный путь от источника света, а в пределах геометрической тени может получиться светлая область, т. е. световые лучи как бы огибают препятствия.

2°. *Плоской* световой волне соответствует параллельный пучок лучей, т. е. определенное направление распространения. В случае неограниченной волновой поверхности вторич-

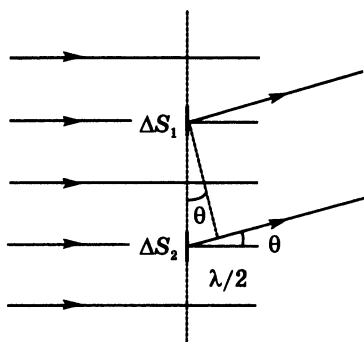


Рис. 6.26.  
Интерференционное гашение  
вторичных волн для любого  
направления  $\theta$  (кроме  $\theta = 0$ )  
при неограниченном размере  
волновой поверхности

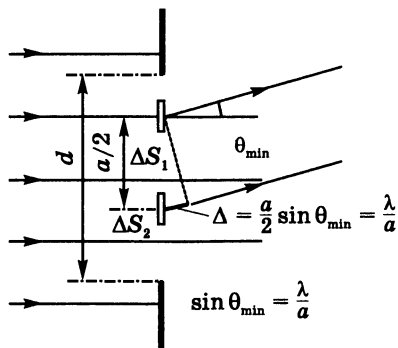


Рис. 6.27.

Угловая расходимость пучка  
света конечной ширины

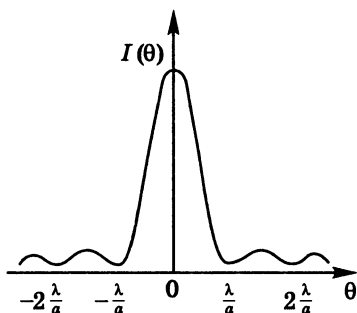


Рис. 6.28.

Угловое распределение потока  
энергии при дифракции  
плоской волны на щели

ные волны в результате интерференции полностью гасят друг друга для любого направления (кроме направления вперед,  $\theta = 0$ ), так как для каждого элемента  $\Delta S_1$  волновой поверхности всегда найдется такой же по площади элемент  $\Delta S_2$ , вторичная волна от которого по данному направлению отстает на  $\lambda/2$  и в удаленной точке наблюдения создает колебания, происходящие в противофазе с колебаниями от  $\Delta S_1$  (рис. 6.26).

Ограничение волновой поверхности при прохождении света сквозь щель (рис. 6.27) приводит к появлению отклоненных (*дифрагировавших*) лучей: световой пучок ограниченного поперечного сечения будет расширяться по мере распространения. Минимальный угол  $\theta_{\min}$ , для которого происходит интерференционное гашение вторичных волн, определяется из условия, что разность хода  $\Delta$  от участков волновой поверхности, отстоящих на половину ширины щели  $a$ , равна  $\lambda/2$ :

$$\Delta = \frac{a}{2} \sin \theta_{\min} \approx \frac{a}{2} \theta_{\min} = \frac{\lambda}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{a}. \quad (6.19)$$

Полное гашение происходит также для направлений  $\theta_n = n\lambda/a$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Угловое распределение потока энергии после прохождения плоской волны сквозь щель шириной  $a$  имеет вид (рис. 6.28)

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad \text{где} \quad u = \frac{\pi a \theta}{\lambda}. \quad (6.20)$$

На центральный максимум приходится около 85% падающей на щель энергии, поэтому  $\theta_{\min}$  из (6.19) можно принять за угловую меру *дифракционной расходимости* светового пучка. Чем меньше поперечный размер пучка, тем сильнее он расширяется. Расходимость пучка лазерного излучения обусловлена дифракцией, но расходимость пучков от прожекторов с тепловыми источниками определяется конечными размерами светящегося тела.

Расстояние  $l_0$  от щели, на котором дифракционное уширение становится равным начальной ширине пучка  $a$ , определяется из условия  $l_0\theta_{\min} \approx a$ . Так как  $\theta_{\min} = \lambda/a$  (см. (6.19)), то

$$l_0 \approx a^2/\lambda. \quad (6.21)$$

Когда расстояние  $l$  от отверстия (щели) мало по сравнению с  $l_0 = a^2/\lambda$ , наблюдаемое распределение освещенности удовлетворительно описывается *геометрической оптикой* (четкая граница тени). При расстояниях  $l$  от отверстия до точки наблюдения порядка  $l_0$  говорят о *дифракции Френеля*, при расстояниях, значительно превосходящих  $l_0$ , — о *дифракции Фраунгофера*.

**3°. Распределение освещенности в дифракционной картине Френеля** от прямолинейного края экрана показано на рис. 6.29, а. На границе геометрической тени амплитуда световых колебаний составляет половину, а интенсивность — одну четверть тех значений, которые достигались бы при отсутствии экрана. При погружении в область геометрической тени интенсивность монотонно убывает до нуля, а освещенная область расщепляется в постепенно сближающиеся дифракционные полосы. Ширина первых полос порядка  $\sqrt{\lambda l}$ , где  $l$  — расстояние от экрана до точки наблюдения.

Граница тени от *круглого* экрана также оказывается размытой и окаймленной чередующимися светлыми и темными дифракционными кольцами (рис. 6.29, б). В центре геометрической тени вторичные волны в результате интерференции усиливают друг друга, создавая светлое *пятно Араго — Пуассона*.

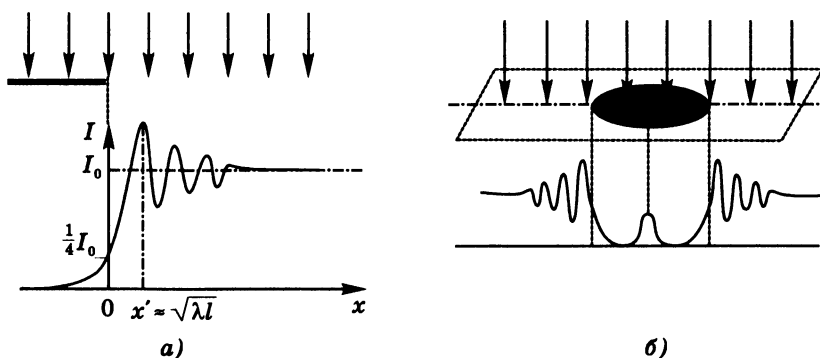


Рис. 6.29.

Дифракция Френеля от края экрана

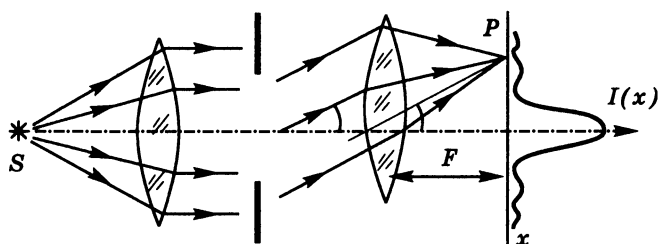


Рис. 6.30.

Дифракция Фраунгофера

4°. Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать в фокальной плоскости собирающей линзы (рис. 6.30). Так как в точку  $x$  фокальной плоскости собираются лучи, которые до линзы имели определенный наклон  $\theta$  к оптической оси ( $x = F \operatorname{tg} \theta \approx F\theta$ ), то распределение световой энергии  $I(x)$  эквивалентно наблюдению дифракции «в бесконечности» ( $l \gg l_0$ ). При ограничении ширины пучка щелью дифракционная картина дается формулой (6.20) и рис. 6.28, если положить там  $\theta = x/F$ . В случае круглой диафрагмы диаметром  $a$  образуется система дифракционных колец с центром в фокусе линзы. Радиальное распределение освещенности имеет такой же характер, как на рис. 6.28. Первое темное кольцо, окружающее центральный максимум, имеет угловой радиус  $\theta_{\min} = 1,2\lambda/a$ .

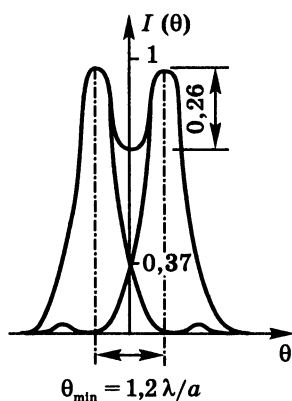


Рис. 6.31.

Критерий Рэлея

Изображение точечного источника  $S$  (рис. 6.30), создаваемое идеальной оптической системой (т. е. системой с исправленными aberrациями), представляет собой не точку (как должно быть согласно геометрической оптике), а фраунгоферову дифракционную картину. Две точки предмета считаются разрешенными на изображении (т. е. наблюдаемыми раздельно), если центр дифракционной картины от одной из них смещен относительно центра другой не меньше, чем на расстояние до ее ближайшего минимума (*критерий Рэлея*, см. рис. 6.31). В этом случае в суммарной картине «провал» между максимумами достигает 20%. Разрешающая сила  $\theta_{\min}$  телескопа (зрительной трубы, бинокля) тем выше, чем больше диаметр пучка, формирующего изображение:

$$\theta_{\min} = 1,2\lambda/a, \quad (6.22)$$

где  $a$  — диаметр объектива (главного зеркала) телескопа.

5°. При падении плоской волны на систему параллельных щелей (*дифракционную решетку*) расширенные вследствие дифракции пучки света когерентны между собой и интерferируют, образуя в фокальной плоскости линзы распределение освещенности с резкими максимумами (рис. 6.32). Направления  $\theta_n$  на эти главные максимумы (и их положение в фокальной плоскости линзы) определяются из условия интерференционного усиления вторичных волн от соседних щелей (разность хода равна целому числу длин волн  $\lambda$ ):

$$d \sin \theta_n = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.23)$$

Здесь  $d$  — расстояние между соседними щелями (называется *период решетки*). Резкость главных максимумов (т. е. отно-

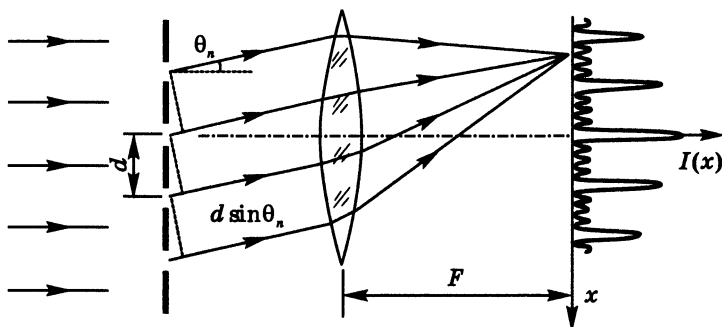


Рис. 6.32.

Дифракционная решетка

шение расстояния между ними к их ширине) равна полному числу  $N$  щелей решетки.

Положение максимумов (кроме центрального с  $n = 0$ ) зависит от длины волны  $\lambda$ . Поэтому дифракционная решетка может служить диспергирующим элементом *спектрального прибора*, предназначенного для разложения исследуемого излучения в *спектр* (для изучения спектрального состава монохроматического излучения). Каждому главному максимуму соответствует свой спектр (спектр  $n$ -го порядка). *Спектральная разрешающая сила*  $\lambda/\Delta\lambda$ , характеризующая способность решетки разделить излучения с близкими длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , равна произведению полного числа штрихов  $N$  на порядок спектра  $n$ :

$$\lambda/\Delta\lambda = Nn. \quad (6.24)$$

Максимальный порядок спектра  $n_{\max}$  при данном периоде  $d$  равен  $L = Nd$ , поэтому максимальная разрешающая сила данной решетки (в спектре максимального порядка) равна

$$Nn_{\max} = Nd/\lambda = L/\lambda.$$

Она определяется только полным размером решетки  $L = Nd$ . Преимущество решеток с малым периодом (большим числом штрихов на единицу длины) в том, что при работе в спектрах низкого порядка ( $n = 1, 2$ ) можно исследовать излучение широкого спектрального состава (в высоких порядках соседние спектры раньше начинают перекрываться).



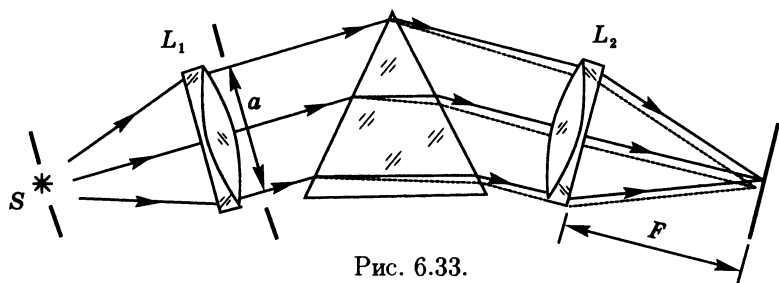


Рис. 6.33.

Схема спектрального прибора

6°. Для разложения излучения в спектр используют также явление *дисперсии*, т. е. зависимость показателя преломления вещества (или фазовой скорости света) от длины волны  $n(\lambda)$ . Схема спектрального прибора с призмой в качестве диспергирующего элемента показана на рис. 6.33. Коллиматор, состоящий из щели  $S$ , на которую падает исследуемое излучение, и объектива  $L_1$ , формирует параллельный пучок лучей. Из-за дисперсии свет разных длин волн преломляется в призме на разные углы и в фокальной плоскости камерного объектива  $L_2$  изображения входной щели получают для каждой длины волны в определенных местах, т. е. происходит разложение излучения в спектр. Спектральная разрешающая сила ограничена из-за того, что монохроматическое излучение дает в спектральном приборе не бесконечно узкую линию, а контур конечной ширины — изображение входной щели. При сужении входной щели ее изображение превращается в фраунгоферову дифракционную картину, ширина главного максимума которой определяется конечной шириной  $a$  выходящего из призмы параллельного пучка лучей.

7°. Явления дифракции и интерференции света лежат в основе *голографии* — способа регистрации и последующего восстановления световых волн. Как и фотография, она обеспечивает возможность записи, хранения и воспроизведения зрительных образов предметов, но в отличие от фотографии голография позволяет записать и восстановить не простое двухмерное распределение освещенности в плоскости сним-

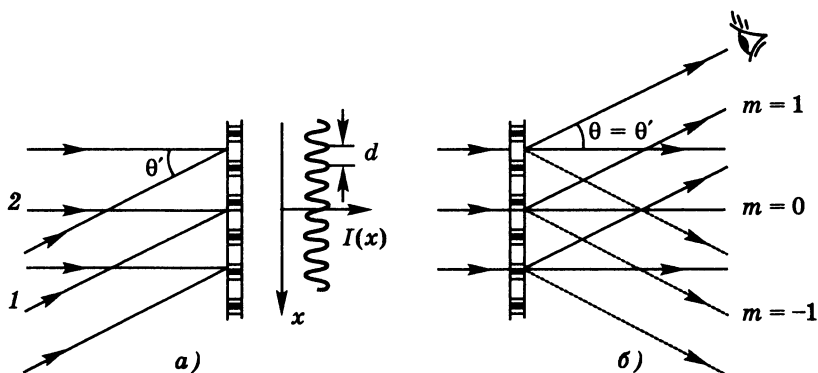


Рис. 6.34.

Получение и восстановление голограммы плоской волны

ка, а *рассеянные предметом световые волны* со всеми их характеристиками — направлением распространения, амплитудой, фазой, длиной волны. Эти волны создают полную иллюзию реальности наблюдаемых предметов — их объемность и возможность изменения ракурса при изменении точки зрения.

На голограмме регистрируется не оптическое изображение объекта, а *интерференционная картина*, возникающая при наложении световой волны, рассеянной предметом, и когерентной с ней опорной волны. Освещение голограммы восстанавливающей волной, идентичной той, что служила опорной при регистрации, вызывает появление дифрагировавших волн, одна из которых представляет собой более или менее точную копию волны, рассеянной предметом.

Наиболее прост для понимания случай голографической записи и восстановления плоской волны. Пусть такая волна 1, исходящая от предмета, падает на фотопластинку под углом  $\theta'$  к нормали (рис. 6.34, а). Одновременно с *предметной волной* 1 падает по нормали когерентная с ней плоская *опорная волна* 2. В результате их интерференции на поверхности фотопластинки устанавливается распределение освещенности  $I(x)$  в виде системы эквидистантных параллельных полос, ориентированных перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 6.34. Расстояние между ними  $d = \lambda / \sin \theta'$ . После проявления пластин-

ки мы получим голограмму в виде дифракционной решетки с плавным (синусоидальным) переходом от прозрачных полос к непрозрачным.

Для воспроизведения записанной таким образом предметной волны на голограмму нужно направить *восстанавливающую волну*, идентичную опорной волне 2, использованной при записи (рис. 6.34, б). В результате ее дифракции на решетке с синусоидальным пропусканием возникают три волны: одна из них соответствует главному максимуму порядка  $m = 0$  и распространяется в направлении падающей волны, две другие — главным максимумам порядка  $m = \pm 1$ . Направление волны с  $m = 1$  определяется условием  $d \sin \theta = \lambda$  (п. 6.4.5°), а так как  $d = \lambda / \sin \theta'$ , то  $\theta = \theta'$ , т. е. направление этой волны (как и все остальные характеристики) точно такое же, как у предметной волны 1 при записи голограммы. Попадая в глаз наблюдателя, восстановленная волна вызывает в отсутствие предмета такие же ощущения, какие вызвала бы предметная волна при непосредственном наблюдении.

В случае сложного объекта рассеянный им когерентный лазерный свет можно представить в виде совокупности плоских волн. Каждая из них при интерференции с опорной волной, получаемой из того же лазерного пучка, создает на голограмме свою систему интерференционных полос (решетку) с определенными ориентацией и периодом. На этапе восстановления при дифракции пучка, идентичного с опорным, такая решетка формирует соответствующую ей исходную элементарную плоскую волну. Совокупность восстановленных волн вызывает те же зрительные образы, что и при непосредственном наблюдении объекта. Помимо этого (мнимого) изображения объекта дифрагировавшие волны с  $m = -1$  формируют еще одно (действительное) изображение объекта.

В отличие от обычной фотографии, где информация о какой-либо точке предмета фиксируется в одной определенной точке, каждый участок голограммы содержит в закодированной форме информацию о всех точках предмета, так как при ее записи свет, рассеянный каждой точкой предмета, обыч-

но падает на всю поверхность фотопластины. Поэтому восстановить предметную волну можно с помощью небольшого участка голограммы. При этом, однако, поле зрения сужается.

## 6.5. Фотометрия

В *фотометрии* рассматриваются энергетические характеристики оптического излучения. Основным понятием здесь служит *поток излучения*, т. е. мощность, переносимая электромагнитным излучением. Чувствительность глаза неодинакова к излучению разных длин волн: она максимальна в зеленой области спектра и плавно уменьшается до нуля при переходе к инфракрасному ( $\lambda > 760$  нм) и ультрафиолетовому ( $\lambda < 400$  нм) излучениям (рис. 6.35). Мощность оптического излучения, оцениваемая по зрительному ощущению, называется *световым потоком*  $\Phi$ .

Источник света называется *точечным*, если он посылает свет равномерно по всем направлениям и его размеры много меньше расстояний, на которых оценивается его действие. *Силой света*  $I$  источника называется световой поток, рас-

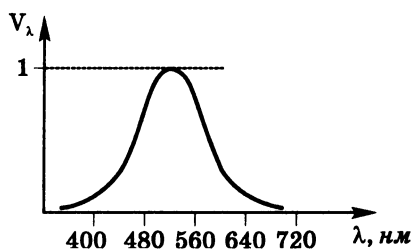


Рис. 6.35.

Спектральная световая эффективность (кривая видности) распространяющийся от источника в пределах телесного угла (п. М9.6.6°) в 1 стерадиан  $I = \Phi/\Omega$ . Полный световой поток, распространяющийся по всем направлениям (т. е. в телесном угле  $\Omega = 4\pi$ ), связан с силой света соотношением

$$\Phi = 4\pi I. \quad (6.25)$$

Основная единица световых (фотометрических) величин — единица силы света *кандела* (кд). Единица светового потока *люмен* — это световой поток от источника силой света 1 кандела, распространяющийся в телесном угле 1 стерадиан.

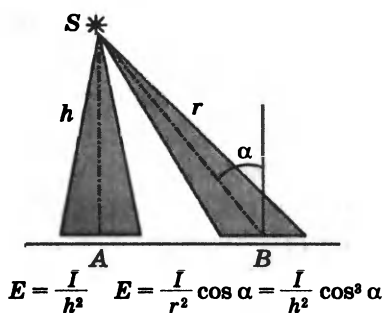


Рис. 6.36.

Освещенность поверхности,  
создаваемая точечным  
источником

кулярно лучам от источника (точка  $A$  на рис. 6.36), обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника:

$$E = \frac{I}{h^2}. \quad (6.26)$$

Освещенность поверхности при наклонном падении лучей (точка  $B$  на рис. 6.36) зависит от угла падения  $\alpha$ :

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2} = \frac{I}{h^2} \cos^3 \alpha. \quad (6.27)$$

Здесь  $r = h / \cos \alpha$  — расстояние от источника до точки наблюдения  $B$ ,  $h$  — высота источника над освещаемой плоской поверхностью. В случае нескольких независимых (некогерентных) источников освещенность какой-либо поверхности равна сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности.

## 7. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Революционные изменения в физике XX столетия обусловлены созданием теории относительности и квантовой теории. Развитие этих фундаментальных физических теорий привело к глубокому переосмысливанию всех основных понятий классической физики. Релятивистская и квантовая теории лежат в основе современных представлений об окружающем нас мире.

## 7.1. Теория относительности

*Теория относительности* — физическая теория пространства и времени, т. е. теория пространственно-временных закономерностей, справедливых для любых физических процессов. Согласно *общей теории относительности* или релятивистской теории тяготения свойства пространства — времени определяются действующими в рассматриваемой области полями тяготения. *Частная* или *специальная теория относительности*, основы которой были сформулированы А. Эйнштейном в 1905 г., описывает свойства пространства — времени в условиях, когда влиянием тяготения на эти свойства можно пренебречь.

Описываемые теорией относительности явления (их называют *релятивистскими*) обнаруживают себя при скоростях движения тел, близких к скорости света в вакууме  $c = 299\,792\,458$  м/с. Скорость  $c$  — *предельная скорость* передачи любых взаимодействий и сигналов из одной точки пространства в другую. С такой скоростью движутся частицы, масса покоя которых равна нулю (*фотоны*), скорость частиц с конечной массой покоя всегда меньше  $c$  (хотя и может быть сколь угодно близка к ней). Существование предельной скорости требует глубокого изменения обычных (классических) пространственно-временных представлений, основанных на повседневном опыте.

Все явления в замкнутой физической системе будут происходить точно так же, если всю систему перенести в другое место или как целое повернуть на некоторый угол. В этом проявляются *свойства симметрии* законов природы, отражающие *однородность пространства* (т. е. равноправие всех точек) и его *изотропность* (равноправие всех направлений). Неизменность физических законов с течением времени отражает *однородность времени*. Наряду с такой инвариантностью (неизменностью) законов природы по отношению к параллельным переносам и поворотам в пространстве и к сдвигу во времени на опыте установлена также инвариантность законов от-

носителем преобразований движения, т. е. перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой: все явления в замкнутой физической системе протекают одинаково независимо от того, покоится она в некоторой инерциальной системе отсчета или движется как целое с постоянной скоростью. Это утверждение об эквивалентности (равноправии) всех инерциальных систем отсчета составляет содержание принципа относительности.

## 7.2. Релятивистская кинематика

1°. Центральное понятие теории относительности — *точечное событие*, т. е. нечто происходящее в данной точке пространства в данный момент времени (например, распад элементарной частицы). Любой физический процесс можно рассматривать как последовательность событий. Некоторое событие характеризуется пространственными координатами  $x, y, z$  и моментом времени  $t$  в инерциальной системе отсчета  $K$ . В другой системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно  $K$  с постоянной скоростью  $v$  в направлении оси  $x$  (рис. 7.1), координаты и время этого же события будут  $x', y', z'$  и  $t'$ .

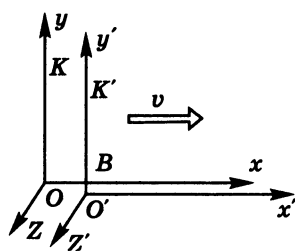


Рис. 7.1.

Системы отсчета  $K$  и  $K'$

Согласно классическим представлениям, сформировавшимся на основе опыта наблюдений за сравнительно медленными движениями ( $v \ll c$ ) макроскопических тел, промежутки времени между событиями и пространственные расстояния между точками, где они произошли, абсолютны, т. е. не зависят от системы отсчета. Поэтому классические формулы, связывающие координаты и время некоторого события в двух системах отсчета (преобразования Галилея), имеют вид

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (7.1)$$

(предполагается, что в момент времени  $t = t' = 0$  системы координат  $K$  и  $K'$  совпадают). Из (7.1) следует классический закон *преобразования скорости* частицы при переходе от одной системы отсчета к другой: если  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  — скорость в  $K$ , а  $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt$  — в  $K'$ , то

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z \quad (7.2)$$

— преобразование скорости частицы при переходе от  $K'$  к  $K$  сводится к векторному сложению относительной  $\mathbf{u}'$  и переносной  $\mathbf{v}$  скоростей:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}$ . Ускорение частицы  $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ , как следует из (7.2), одинаково в  $K$  и  $K'$ :  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ . Уравнение движения классической механики  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$  (второй закон Ньютона) сохраняет свой вид при переходе от  $K$  к  $K'$ , т. е. преобразования Галилея удовлетворяют *принципу относительности* в отношении законов механики.

**2°.** Опыт показывает, что принцип относительности справедлив не только для механических, но и для любых физических явлений. В частности, все попытки обнаружить влияние орбитального движения Земли на электродинамические и оптические явления дали отрицательный результат (опыт Майкельсона — Морли и его аналоги). Однако законы электродинамики (уравнения Максвелла) не сохраняют своего вида при переходе к другой системе отсчета по формулам преобразований Галилея (7.1). Скорость электромагнитных волн (света), в соответствии с классическим законом преобразования скорости (7.2), не может быть одинаковой во всех системах отсчета, как этого требует принцип относительности (равноправие инерциальных систем отсчета). Поэтому существование универсальной, одинаковой во всех системах отсчета предельной скорости  $c$  (скорости света) требует коренного изменения классических представлений об абсолютной длине и абсолютном времени, замены основанных на них преобразований Галилея (7.1) другими преобразованиями, а также пересмотра (уточнения) законов механики.



**3°. В основе теории относительности лежат следующие два принципа (постулата).**

I. Принцип относительности (эквивалентность всех инерциальных систем отсчета для любых физических явлений).

II. Принцип существования универсальной предельной скорости распространения взаимодействий (сигналов).

Определение *одновременности событий* (иначе — *синхронизация часов*) основано на независимости скорости сигнала от направления. Пусть из точки  $A$  (рис. 7.2) в момент  $t_1$  по часам  $A$  посылается сигнал, достигающий точки  $B$  в момент  $t'_1$  по часам  $B$ , а отраженный сигнал возвращается в точку  $A$  в момент  $t_2$ . По определению часы в точках  $A$  и  $B$  идут синхронно, если  $t' = (t_1 + t_2)/2$ .

Для *измерения расстояний* можно принять, по определению, радиолокационный метод, в котором измеряется время прохождения сигнала туда и обратно, а расстояние  $l$  получают, умножая одинаковую по всем направлениям скорость сигнала на половину этого времени:

$$l = c(t_2 - t_1)/2.$$

**4°. Понятие одновременности событий *относительно*, т. е. зависит от системы отсчета.** Пусть в точке  $A$  (рис. 7.3) происходит кратковременная вспышка света, так что в равноудаленные от  $A$  точки  $B$  и  $C$  системы отсчета  $K'$  одновременно отправляются световые сигналы. Эти сигналы достигнут точек  $B$  и  $C$  одновременно по часам системы  $K'$ . Но эти же собы-

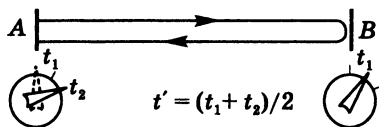


Рис. 7.2.

Синхронизация часов

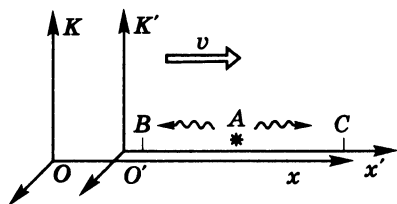


Рис. 7.3.

Относительность  
одновременности событий

тия в системе  $K$  не будут одновременными: точка  $B$  движется навстречу сигналу, и свету на пути к  $B$  придется преодолеть меньшее расстояние, чем на пути к  $C$ . Так как скорость сигнала  $c$  не зависит от направления, в системе отсчета  $K$  приход сигнала в  $B$  произойдет раньше, чем в  $C$ .

Промежутки времени и расстояния, измеренные с помощью указанных процедур, также *относительны*. Промежуток времени называется *собственным временем*  $\tau_0$ , если он измерен по часам той системы отсчета, где рассматриваемые события произошли в одном месте. В любой другой системе отсчета промежуток времени  $\tau$  между этими же событиями будет больше ( $\tau > \tau_0$ ):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.3)$$

где  $v$  — *относительная скорость* систем отсчета.

О зависимости пространственных расстояний от системы отсчета говорят как о *релятивистском сокращении длины* движущегося тела. *Собственной длиной* твердого стержня называют его длину, измеренную в той системе отсчета, где он покоится. В любой другой системе отсчета, относительно которой стержень движется со скоростью  $v$ , его длина  $l$  сокращается в направлении движения  $l < l_0$ .

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.4)$$

В соответствии с принципом относительности кинематические эффекты (7.3) и (7.4) *взаимны*. Например, если в системах отсчета  $K$  и  $K'$  есть два идентичных стержня, то с точки зрения каждой из них короче тот стержень, который движется относительно нее.

5°. Из постулатов теории относительности следуют *преобразования Лоренца*, связывающие координаты и время произвольного события в двух системах отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.5)$$

Обратные преобразования от  $K$  к  $K'$  получаются из (7.5) заменой  $v \rightarrow -v$ . Из (7.5) следуют релятивистские формулы преобразования скорости частицы:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2) u'_x}, & u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c^2) u'_x}, \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 + v/c^2) u'_x}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Эти формулы отражают абсолютный характер предельной скорости  $c$ : если световой импульс в  $K'$  движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $u'_x = c$ , то в  $K$  его скорость по (7.6) также равна  $c$ :

$$u_x = \frac{c + v}{1 + v/c} = c.$$

В предельном случае  $v \ll c$  преобразования Лоренца (7.5) переходят в преобразования Галилея (7.1), а релятивистский закон преобразования скорости (7.6) — в классический закон сложения скоростей (7.2). Это значит, что классические представления о пространстве и времени приближенны и справедливы лишь при сравнительно медленных ( $v \ll c$ ) движениях.

**6°.** Если при переходе от одной системы отсчета к другой по преобразованиям Галилея неизменными (инвариантными) остаются промежутки времени и расстояния в отдельности, то преобразования Лоренца оставляют инвариантной величину, называемую *интервалом* между событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \quad (7.7)$$

Здесь

$$t_{12} = t_1 - t_2, \quad l_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

— промежуток времени между событиями и расстояние между точками, в которых они произошли. Пространственно-временной интервал обобщает понятия промежутка времени и пространственного расстояния.

В зависимости от того, какая составляющая — временная или пространственная — преобладает, интервалы делятся на *времениподобные* ( $c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2$ ) и *пространственноподобные* ( $l_{12}^2 > c^2 t_{12}^2$ ). В случае времениподобного интервала всегда можно указать систему отсчета  $K'$ , в которой рассматриваемые события произошли в одном месте ( $l'_{12} = 0$ ) и интервал  $s_{12}$  совпадает (с точностью до множителя  $c$ ) с собственным временем  $\tau_0$ . Для таких событий понятия «раньше» и «позже» имеют абсолютный характер, и между ними возможна причинно-следственная связь. В случае пространственноподобного интервала всегда можно указать систему отсчета  $K''$ , в которой данные события происходят одновременно ( $t''_{12} = 0$ ) и модуль интервала равен собственному расстоянию  $l_0$ . Между такими событиями невозможна причинно-следственная связь, так как никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей, чем скорость света  $c$ , и понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для этих событий относительны (т. е. зависят от системы отсчета).

### 7.3. Релятивистская динамика

1°. Законы классической динамики *инвариантны* относительно преобразований Галилея. Поэтому отказ от классических представлений о пространстве и времени и основанных на них преобразований Галилея требует уточнения законов механики. Уравнения релятивистской динамики переходят в классические для медленных движений ( $v \ll c$ ), где их справедливость подтверждается на опыте.

В теории относительности, как и в классической механике, для замкнутой физической системы сохраняются импульс  $p$  и энергия  $E$ , однако релятивистские выражения для них отличаются от соответствующих классических:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.8)$$

Здесь  $m_0$  — масса покоя, характеризующая инертность тела при медленных ( $v \ll c$ ) движениях. Релятивистские энергия и импульс (7.8) удовлетворяют уравнениям, аналогичным соответствующим уравнениям классической механики (п. 2.2.2°):

$$\frac{dp}{dt} = \sum F \text{ (второй закон Ньютона)}, \quad \frac{dE}{dt} = \sum F \cdot v. \quad (7.9)$$

**2°.** Масса покоя  $m_0$  не является сохраняющейся величиной. В частности, при распадах и превращениях элементарных частиц и атомных ядер сумма энергий и импульсов частиц сохраняется, а сумма масс покоя меняется. Например, при аннигиляции (§ 7.7) электрона и позитрона с образованием двух  $\gamma$ -квантов (фотонов) сумма масс покоя уменьшается на  $2m_e$ .

В системе отсчета, где тело покоится, его энергия в соответствии с (7.8) равна

$$E_0 = mc^2 \quad (7.10)$$

и называется *энергией покоя*. Выражаемое формулой Эйнштейна (7.10) соотношение называют *законом пропорциональности массы и энергии*. Если тело, оставаясь в покое, получает или отдает энергию  $\Delta E$  в виде излучения или теплоты, то пропорционально получаемой энергии изменяется его масса покоя:

$$\Delta m_0 = \Delta E/c^2.$$

Существование энергии покоя наиболее ярко проявляется, например, при аннигиляции частицы и античастицы, когда вся их энергия покоя превращается в энергию  $\gamma$ -излучения. Однако в большинстве физических процессов подавляющая часть энергии покоя (и соответствующей ей массы покоя) в превращениях не участвует, и поэтому масса, определяемая взвешиванием, практически сохраняется, несмотря на то что тело поглощает или выделяет энергию. Например, при сгорании 1 кг водорода соединяется с 8 кг кислорода и при этом выделяется  $\Delta E \approx 10^8$  Дж энергии. Масса покоя образовавшейся воды лишь на  $\Delta m_0 = \Delta E/c^2 \approx 10^{-9}$  кг меньше массы исходных веществ, а относительное изменение массы  $\Delta m_0/m_0 \approx 10^{-10}$ . Такое изменение массы слишком мало, чтобы его можно было обнару-

жить взвешиванием. В ядерных реакциях (п. 7.6.2°) энергия покоя нуклонов, входящих в состав ядер, остается неизменной, но здесь изменяющаяся часть энергии (т. е. энергия взаимодействия нуклонов) составляет уже заметную долю энергии покоя.

Иногда вводят зависящую от скорости релятивистскую массу  $m$  частицы, связанную с ее массой покоя соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Тогда энергию частицы  $E$ , как видно из (7.8), можно записать в виде

$$E = mc^2,$$

т. е. релятивистские энергия и масса отличаются лишь постоянным множителем  $c^2$  (*закон эквивалентности массы и энергии*). Импульс частицы  $p = mv$  — связь импульса со скоростью формально выглядит так же, как и в нерелятивистской механике.

3°. Для движущегося тела разность полной энергии (7.8) и энергии покоя (7.10) определяет *кинетическую энергию*:

$$E_{\text{кин}} = E - E_0 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (7.11)$$

При  $v/c \ll 1$  можно воспользоваться разложением

$$1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + (1/2)v^2/c^2$$

(п. М10.2.1°), и (7.11) переходит в нерелятивистское выражение (п. 2.4.5°) для кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} \approx m_0 v^2 / 2.$$

Чтобы разогнать тело с отличной от нуля массой покоя до скорости света, ему в соответствии с (7.11) пришлось бы сообщить бесконечно большую энергию. Поэтому скорость  $c$  — предельная для частиц с  $m_0 \neq 0$ : этой скорости нельзя достичь, но можно сколь угодно приблизиться к ней.

4°. Релятивистскую формулу, связывающую энергию  $E$  и импульс  $p$  частицы, получают из выражений (7.8), исключая скорость  $v$ :

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (7.12)$$

Энергия и импульс частицы зависят от системы отсчета, но правая часть в (7.12) представляет релятивистский инвариант. Для ультрарелятивистских частиц, энергия  $E$  которых много больше энергии покоя  $m_0 c^2$ , соотношение (7.12) можно приближенно записать в виде

$$E \approx pc \quad \text{при } E \gg m_0 c^2. \quad (7.13)$$

Аналогия между формулами (7.12) и (7.7) дает основание считать, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой энергия и импульс частицы преобразуются подобно временной и пространственной координатам события, т. е. по формулам (7.5), в которых следует произвести замену

$$t \rightarrow E/c, \quad x \rightarrow p_x, \quad y \rightarrow p_y, \quad z \rightarrow p_z,$$

и аналогично для всех величин со штрихами (т. е. в системе отсчета  $K'$ ). При этом энергия покоя в правой части (7.12) является аналогом инвариантного интервала в формуле (7.7).

### Примеры

1) Частица движется под действием постоянной силы. Из (7.9) при  $F = \text{const}$  следует  $p = Ft$ , если в начальный момент  $t = 0$  частица покоилась ( $p = 0$ ). Подставляя  $p = Ft$  в (7.12), получаем зависимость энергии от времени:

$$E^2 = (Ft)^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (7.14)$$

Чтобы получить явно зависимость скорости частицы от времени, разделим первую из формул (7.8) на вторую:

$$v = \frac{c^2}{E} p = \frac{cF}{\sqrt{(Ft)^2 + m_0^2 c^2}} t. \quad (7.15)$$

Если  $Ft \ll m_0 c$  (т. е. до тех пор, пока движение частицы нерелятивистское), то, пренебрегая в (7.15) первым членом в подкоренном выражении, получаем обычную нерелятивистскую формулу для движения под действием постоянной силы:  $v = (F/m_0)t$ .

При  $t \rightarrow \infty$  рост скорости  $v$  замедляется (рис. 7.4), и она стремится к конечному пределу  $c$ , в чем можно убедиться, переходя в (7.15) к пределу при  $t \rightarrow \infty$  (п. М5.2.5°).

2) Заряженная частица движется в однородном магнитном поле. Сила Лоренца (п. 4.3.2°) перпендикулярна скорости частицы, поэтому скорость не меняется по модулю и, следовательно, не меняется и релятивистская масса. Закон изменения импульса (7.9) записывается в виде

$$m \frac{dv}{dt} = qv \times B. \quad (7.16)$$

Если скорость  $v$  перпендикулярна индукции  $B$  магнитного поля, то частица движется по окружности с центростремительным ускорением  $v^2/R$ , где  $R$  — радиус окружности. В этом случае уравнение (7.16) дает

$$m \frac{v^2}{R} = qvB,$$

откуда

$$R = \frac{mv}{qB}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}.$$

Выражения для  $R$  и  $\omega$  имеют такой же вид, как и в нерелятивистском случае (п. 4.3.2°), однако входящая в них релятивистская масса  $m$  зависит от скорости частицы (п. 7.3.1°). В циклических ускорителях электроны разгоняются до столь близких к  $c$  скоростей, что их релятивистская масса становится больше массы протонов. Это требует огромных магнитных

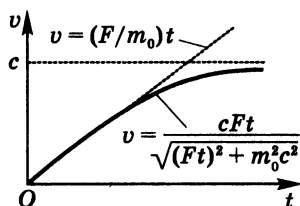


Рис. 7.4.

График скорости при движении под действием постоянной силы



полей, чтобы удерживать электроны на круговой траектории того же радиуса, что и в начале разгона.

3) *Взаимные превращения элементарных частиц* (§ 7.7). Покажем, что свободный электрон не может излучать свет. В системе отсчета, где электрон неподвижен, его энергия до испускания фотона ( $\gamma$ -кванта)  $E_0 = m_0 c^2$ . После испускания фотона вследствие закона сохранения импульса электрон приобретает некоторую скорость  $v$  и энергия системы электрон — фотон равна

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\nu,$$

где  $h\nu$  — энергия испущенного фотона (п. 7.4.4°). Видно, что удовлетворить закону сохранения энергии невозможно, так как всегда  $E > E_0$ . Приведенные рассуждения применимы к частицам, не меняющим своего внутреннего состояния. Свободно движущиеся атомы могут излучать и поглощать свет.

*Аннигиляция* частицы и античастицы (§ 7.7), например электрона и позитрона, с образованием только одного фотона невозможна, так как в системе отсчета, связанной с центром масс частицы и античастицы, полный импульс до аннигиляции равен нулю. Чтобы полный импульс был равен нулю и после аннигиляции, необходимо рождение по меньшей мере двух фотонов.

Один фотон может породить электрон-позитронную пару, но только в присутствии какой-либо частицы, которая обеспечивает выполнение закона сохранения импульса. Необходимая для рождения пары энергия фотона будет тем меньше, чем больше масса  $M$  частицы, «принимающей на себя» импульс фотона. Наименьшая энергия фотона определяется из соотношения  $h\nu = 2m_0 c^2$ , что составляет 1,02 МэВ для электрон-позитронной пары. Такая пороговая энергия соответствует рождению неподвижных электрона и позитрона в присутствии столь массивной частицы ( $M \gg m_0$ ), что кинетической энергией ее отдачи можно пренебречь.

## 7.4. Основы квантовой физики

1°. Границы применимости представлений классической физики при описании свойств микрообъектов устанавливаются соотношением неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim h, \quad (7.17)$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  — неопределенности значений координаты частицы  $x$  и соответствующей компоненты импульса  $p_x$  в один и тот же момент времени,  $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка. Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определена одна из входящих в неравенство величин, тем менее определенно значение другой.

Соотношение, связывающее неопределенность в изменении энергии частицы и неопределенность в моменте времени, когда это изменение произошло, называется неравенством Бора — Гейзенберга:

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim h.$$

Оно означает, что определение энергии с точностью до  $\Delta E$  занимает промежуток времени, не меньший  $\Delta t = h/\Delta E$ .

Аналогичное соотношение связывает длительность  $\Delta t$  цуга волн с интервалом  $\Delta \nu$  частот монохроматических волн, входящих в состав цуга:  $\Delta \nu \cdot \Delta t \gtrsim 1$  (см. (5.51)). Это становится очевидным, если обратиться к соотношению  $E = h\nu$  (п. 7.4.2°).

Соотношение неопределенностей является фундаментальным законом природы.

### Примеры

1) Неопределенность значения координаты  $\Delta x$  электрона в атоме не превосходит размера атома  $d \sim 10^{-8}$  см. Поэтому неопределенность значения импульса  $\Delta p$  составляет

$$\Delta p \sim \frac{h}{d} \approx 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

В планетарной модели атома электрон обращается вокруг ядра, поэтому на основании второго закона Ньютона имеем

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}.$$

Отсюда

$$p = mv = e \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{r}} \approx 2 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Неопределенность значения импульса оказалась больше, чем само значение, определяемое на основе представлений классической физики. Это значит, что для электрона в атоме классическое описание непригодно.

2) Ускоряющее напряжение в кинескопе телевизора составляет примерно  $U = 15$  кВ. Разогнанный такой разностью потенциалов электрон обладает импульсом

$$p = \sqrt{2meU} \approx 6,6 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Этот импульс направлен вдоль оси трубки. Диаметр электронного пучка в современном телевизоре составляет  $d \geq 10^{-5}$  м. С такой точностью фиксируется координата электрона в перпендикулярном оси пучка направлении:  $\Delta x \sim d$ . В силу соотношения неопределенностей импульс электрона  $\Delta p$ , перпендикулярный оси пучка, равен

$$\Delta p \approx h/d \approx 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Связанная с этим неопределенность в направлении движения электрона

$$\Delta \theta = \Delta p/p \approx 10^{-6} \text{ рад}.$$

Так как длина пути электрона в кинескопе не превышает  $l \leq 1$  м, то неконтролируемое смещение  $s$  электрона на экране, вызванное квантовыми эффектами, не превосходит  $s = l\Delta\theta \leq 10^{-6}$  м, т. е. меньше диаметра пучка. Для электрона в телевизоре следует использовать классическое описание.

**2°. Реальные физические микрообъекты — фотоны, электроны и т. д. — имеют потенциальную возможность проявлять и корпускулярные и волновые свойства (*корпускулярно-волновой дуализм*). Какие именно свойства будут проявляться — зависит от условий эксперимента. Волновыми па-**

раметрами микрообъекта являются частота  $\nu$  (или круговая частота  $\omega = 2\pi\nu$ ), длина волны  $\lambda = c/\nu$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$ , определяющий направление распространения, причем его модуль

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c = \omega/c.$$

Корпускулярными параметрами микрообъекта являются энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$ . Волновые и корпускулярные свойства микрообъектов связаны соотношениями

$$E = \hbar\omega \text{ или } E = h\nu \text{ (соотношение Планка),}$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \text{ или } \mathbf{p} = \frac{h}{2\pi}\mathbf{k}, \text{ откуда } p = h/\lambda \text{ (соотношение де Бройля).}$$

В этих выражениях  $\hbar = h/2\pi$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ .

Величина  $\lambda = h/p$  называется *дебройлевской длиной волны* микрообъекта. Правые части этих соотношений содержат величины  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , определяемые из интерференционных явлений, а левые ( $E$  и  $\mathbf{p}$ ) характеризуют микрообъект как частицу.

Соотношения Планка и де Бройля означают, что между исключаяющими друг друга (по классическим представлениям) корпускулярными и волновыми свойствами имеет место эквивалентность — меры этих свойств всегда пропорциональны. Корпускулярные и волновые свойства дополняют друг друга, ибо только их совокупность дает полное представление о микрообъекте. В этом заключается *принцип дополнительности*, сформулированный Бором.

Из соотношения неопределенностей следует, что в любом явлении в зависимости от конкретных условий реализуется только одна возможность — реализуются (и наблюдаются на опыте) либо только волновые, либо только корпускулярные свойства. Свойства, которые проявляются лишь в разных опытах, произведенных при взаимно исключаяющих условиях, называются дополнительными. Рассматривать одновременное проявление дополнительных свойств не имеет смысла. Этим объясняется отсутствие противоречия в понятии «корпускулярно-волновой дуализм».

3°. Представления о волнах де Бройля можно, наряду с соотношением неопределенностей Гейзенберга, использовать для выяснения вопроса о том, квантовой или классической теорией следует пользоваться для описания конкретного явления. Для этого следует сравнить сопоставляемую объекту по формуле  $\lambda = h/p$  длину волны с характерными размерами в соответствующей задаче: волновые свойства объекта не играют существенной роли, пока эта длина волны не станет соизмеримой с характерными размерами. Так, подобрав для пучка электронов такой импульс  $p$ , чтобы длина волны  $\lambda = h/p$  оказалась одного порядка с постоянной решетки какого-либо кристалла, можно утверждать, что при пропускании пучка электронов через этот кристалл будет наблюдаться явление дифракции. Это подтверждается экспериментом.

Используя представления о волновых свойствах электрона, можно получить правила квантования Бора (п. 7.5.1°) из требования, чтобы на стационарной орбите электрона в атоме укладывалось целое число волн де Бройля  $n\lambda = nh/p = 2\pi r$ . Отсюда  $mvr = nh/2\pi$ .

4°. Представление о световых квантах — фотонах было введено для объяснения характера излучения абсолютно черного тела (п. 7.5.4°). Именно для фотонов впервые была предложена формула  $E = h\nu$ . Целый ряд экспериментальных фактов допускает объяснение только на основе представления о свете как об идеальном газе фотонов.

Поскольку энергия всегда связана с массой соотношением  $E = mc^2$ , то масса фотона (п. 7.3.2°)

$$m = h\nu/c^2.$$

Фотоны не существуют в состоянии покоя, поэтому их масса покоя  $m_0$  равна нулю, а масса  $m$ , определяемая этой формулой, — это масса фотона, движущегося со скоростью  $c$  (п. 7.3.2°). Импульс фотона равен произведению его массы на скорость:

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

5°. *Фотоэффект* (внешний) — явление вырывания электронов из вещества под действием света.

*Законы фотоэффекта:*

1) сила тока насыщения, т. е. число электронов, вырываемых светом с поверхности металла в единицу времени, пропорциональна падающему световому потоку;

2) максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от падающего светового потока;

3) для каждого вещества существует пороговое значение частоты  $\nu_{\min}$  — *красная граница фотоэффекта*;

4) момент начала эмиссии фотоэлектронов следует за моментом включения электромагнитного поля излучения практически мгновенно (безынерционно).

Фотоэффект иллюстрирует проявление корпускулярных свойств света. Каждый фотон поглощается независимо, происходящие при этом энергетические превращения описываются *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*, отражающим закон сохранения энергии в элементарном акте взаимодействия света с веществом:

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - A,$$

где  $A$  — *работа выхода* электрона из металла, равная энергии, необходимой для удаления электрона из этого металла.

Красная граница фотоэффекта определяется с помощью уравнения Эйнштейна при  $\nu = 0$ :

$$h\nu_{\min} = A.$$

6°. *Давление света* может быть объяснено как с волновой (п. 5.7.12°), так и с корпускулярной точки зрения. В последнем случае давление объясняется тем, что фотоны передают свой импульс тем телам, с которыми они сталкиваются. Импульс фотона (п. 7.4.4°)

$$p = \frac{h\nu}{c}.$$

7°. *Эффект Доплера* допускает объяснение как с волновой (п. 5.7.11°), так и с корпускулярной точки зрения. В последнем случае применение законов сохранения энергии и импульса к акту испускания фотона свободно движущимся атомом (рис. 7.5)

$$h\nu' - h\nu = \frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m},$$

$$p = p' + p_\Phi$$

приводит к выражению для относительного сдвига частоты излучения:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \theta,$$

где  $v = p/m$  — скорость движения излучающего атома.

8°. *Эффект Комптона* заключается в изменении длины волны рентгеновского излучения в результате упругого рассеяния фотонов на электронах вещества с легкими атомами (графита, парафина и т. д.). Наблюдаемое изменение длины волны  $\Delta\lambda$  зависит от угла  $\theta$  между направлением первичного пучка и направлением рассеянного излучения следующим образом:

$$\Delta\lambda = 2k \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.18)$$

причем постоянная  $k$ , найденная из эксперимента, равна 0,0024 нм.

Явление Комптона удается объяснить только исходя из корпускулярных представлений о свете. Рассматривая зако-

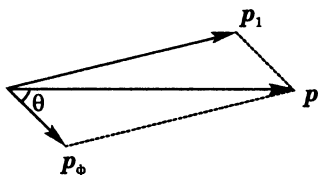


Рис. 7.5.

Закон сохранения импульса  
в эффекте Доплера

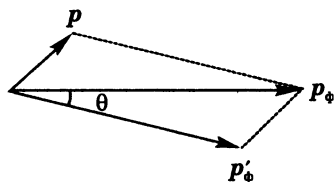


Рис. 7.6.

Закон сохранения импульса  
в эффекте Комптона

ны сохранения энергии и импульса при столкновении фотона с покоившимся электроном, приходим к уравнениям (рис. 7.6)

$$h\nu = h\nu' + \frac{p^2}{2m}, \quad p_\phi = p'_\phi + p,$$

где  $p$  — импульс электрона после столкновения с фотоном, а  $p_\phi = h\nu/c$  и  $p'_\phi = h\nu'/c$  — импульс фотона до и после рассеяния. Учитывая, что  $\lambda = c/\nu$ , приходим к выражению (7.18) для  $\Delta\lambda$ , причем коэффициент  $k = 2h/mc = 0,0024$  нм.

## 7.5. Строение атома

1°. *Модель атома водорода по Бору.* Планетарная модель Резерфорда для атома водорода обосновывается с помощью квантовых постулатов Бора, введенных в 1913 г. для объяснения устойчивости атома и спектральных закономерностей.

I. Атом может находиться только в стационарных квантовых состояниях, каждому из которых соответствует определенное дискретное значение энергии  $E_n$ . В стационарном состоянии атом не излучает.

II. Излучение света происходит при квантовом (скачкообразном) переходе атома из стационарного состояния с большей энергией  $E_m$  в стационарное состояние с меньшей энергией  $E_n$ . Энергия излученного фотона равна разности энергий стационарных состояний:

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n.$$

Постулаты Бора находятся в противоречии с классической механикой и электродинамикой. Они получили теоретическое обоснование в квантовой механике.

Выражения для энергии атома водорода в стационарных состояниях (т. е. для энергетических уровней) и радиусов соответствующих круговых боровских орбит получаются с помощью *правила квантования* (п. 7.4.3°):

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.19)$$



Используя второй закон Ньютона для электрона, обращающегося вокруг ядра,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (7.20)$$

и выражение для полной энергии электрона в атоме

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r},$$

получаем с помощью (7.19)

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 = a_0 n^2, \quad (7.21)$$

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{R}{n^2}.$$

Здесь

$$R = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6056981 \text{ эВ}$$

— энергия ионизации атома водорода, т. е. минимальная энергия, которую нужно сообщить атому водорода в основном состоянии для того чтобы удалить из него электрон.

Величина

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529177249 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

называется *боровским радиусом* — это радиус ближайшей к ядру электронной орбиты.

В наинизшем энергетическом состоянии с

$$E_1 = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{4\hbar^2} = -R = -13,6056981 \text{ эВ}$$

атом может находиться сколь угодно долго. Состояния с  $n = 2, 3, 4, \dots$  соответствуют возбужденному атому. Время жизни свободного атома в этих состояниях составляет примерно  $10^{-8}$  с (п. 7.5.3°).

Энергия квантов света, испускаемого возбужденными атомами водорода при переходах в более низкие энергетические

Таблица 7.1

**Основные формулы атомной физики  
в гауссовой системе единиц и в СИ**

Наименование	Гауссова система	СИ
Радиус орбиты электрона в атоме водорода	$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2$	$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} n^2$
Уровни энергии атома водорода	$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$	$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$	$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$

состояния, определяется разностью энергии начального ( $E_k$ ) и конечного ( $E_n$ ) состояний:

$$\hbar\omega_{kn} = E_k - E_n = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

Переходы на уровень с  $n = 2$  образуют *серия Бальмера*, находящуюся в видимой области спектра. В атомной физике обычно используется гауссова система единиц (§ 1.2), где приведенные выше формулы имеют более простой вид (табл. 7.1).

**2°.** Согласно квантовой механике бессмысленно говорить о движении электрона в атоме по определенной орбите. Физический смысл имеет только *вероятность* обнаружить электрон в том или ином месте (п. 7.4.1°). Для состояний со сферически-симметричным распределением вероятности обнаружения электрона на некотором расстоянии от ядра ее максимумы приходятся на положения круговых боровских орбит. Наибольшей скоростью обладает электрон, находящийся (на языке теории Бора) на ближайшей к ядру разрешенной орбите.

Из соотношений (7.20) и (7.21) при  $n = 1$  следует

$$v^2 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{e^2}{\hbar^2},$$

откуда

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137}.$$

Величина  $\alpha$  называется *постоянной тонкой структуры*. Она определяет структуру атома. Отношение модуля энергии кулоновского взаимодействия электрона (на наинизшей орбите) с ядром к энергии покоя электрона  $mc^2$  (п. 7.3.2°) равно

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0 mc^2} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \frac{e^4}{(\hbar c)^2} = \alpha^2 \ll 1.$$

Энергия связи электрона в атоме много меньше энергии покоя электрона. Атом представляет собой сравнительно слабо связанную систему.

Заполнение электронами разрешенных стационарных состояний в атоме происходит в соответствии с условием *минимума энергии* всей его электронной оболочки и *принципом Паули*: в любой квантовой системе в каждом разрешенном состоянии не может находиться более одного электрона.

В тяжелых атомах с зарядом ядра  $Ze$  энергия связи внутренних электронов в  $Z^2$  раз больше, чем в атоме водорода, а их расстояния от ядра — в  $Z$  раз меньше радиуса первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи внешних электронов сравнима с энергией связи электронов в атоме водорода (порядка 10 эВ), а полный размер многоэлектронного атома близок к размеру атома водорода.

**3°. Излучение**, связанное с переходами электрона между состояниями внешней оболочки («оптического» электрона), лежит в *оптическом диапазоне*. Переходы электрона между состояниями внутренних близких к ядру оболочек приводят к испусканию *рентгеновского излучения*.

Свет, испускаемый атомом при переходах оптического электрона, имеет длину волны в несколько сотен нанометров, что на три порядка превосходит размер атома. Действительно, принимая для изменения энергии атома в соответствии с (7.21) значение порядка энергии ионизации  $1R$ , получаем оценку для длины волны излучения:

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \approx 2\pi \frac{c\hbar}{R} \approx \frac{4\pi}{\alpha} a_0 \approx 10^3 a_0.$$

Большая длина волны излучения по сравнению с размером атома приводит к тому, что время жизни  $\tau$  атома в возбужденном состоянии велико по сравнению с периодом колебаний  $T = 2\pi/\omega$  в излучаемой волне, т. е.  $\omega\tau \gg 1$ . Покажем это. Считая, что амплитуда колебаний оптического электрона равна размеру атома  $a_0$ , оценим с помощью (5.45) излучаемую атомом мощность:

$$P \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2\omega^4 a_0^2}{c^3}.$$

Время  $\tau$  излучения фотона с энергией  $\hbar\omega$  равно

$$\tau \approx \frac{\hbar\omega}{P} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar c^3}{a^2\omega^3 a_0^2}.$$

Учитывая, что  $\omega a_0$  равно скорости электрона на орбите в атоме, получаем

$$\omega\tau \approx 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar c}{e^2} \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^3}.$$

Для оптических частот ( $\omega \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ) получаем для времени излучения (времени жизни атома в возбужденном состоянии) оценку  $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$ .

4°. Спектральный состав излучения отдельных возбужденных атомов представляет собой набор сравнительно узких линий, характерных для каждого химического элемента. Спектр излучения твердых и жидких *нагретых тел* является *сплошным*, т. е. содержит непрерывный набор частот из широкого диапазона. Каждое тело излучает в любом спектральном интервале тем сильнее, чем больше оно в этом интервале поглощает при той же температуре. Тело называется *черным*, если оно поглощает все падающее на него излучение.

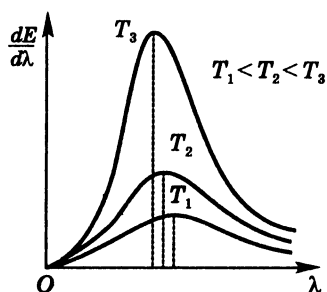


Рис. 7.7.

Спектральная плотность  
равновесного излучения

Излучение, находящееся в тепловом равновесии с телами, имеющими определенную температуру, называется *равновесным* или черным излучением. Спектральный состав этого излучения будет таким же, как и у излучения черного тела при той же температуре, и выражается *формулой Планка* (рис. 7.7):

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (7.22)$$

где  $E$  — объемная плотность энергии равновесного излучения. С увеличением температуры максимум распределения (7.22) смещается в область более коротких волн, а полная энергия излучения растет пропорционально четвертой степени температуры (п. 1.3.9°).

## 7.6. Атомное ядро

1°. *Атомное ядро* любого элемента состоит из *протонов* и *нейтронов* (§ 7.7), называемых нуклонами. Основные характеристики стабильных ядер — *массовое число*  $A$  (равное числу нуклонов — протонов и нейтронов), электрический заряд  $Ze$  (равный числу протонов  $Z$ , умноженному на заряд протона  $e$ ), масса  $E$ , энергия связи  $\Delta E_{\text{св}}$ , радиус  $R$ .

Число протонов в ядре  $Z$  является порядковым номером данного химического элемента в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева. Ядра с одинаковым числом протонов  $Z$ , но разным числом нейтронов  $N = A - Z$  называются *изотопами*. Наиболее стабильными являются ядра, у которых число нейтронов  $N$  равно одному из *магических чисел*:  $N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 120$ .

Размер ядра составляет примерно  $10^{-13}$  см (1 ферми). Радиус  $R$  ядра приближенно дается формулой

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где  $R = (1,2-1,3) \cdot 10^{-13}$  см.

Масса ядра  $M$  меньше суммы масс входящих в его состав протонов и нейтронов:

$$M < Zm_p + Nm_n,$$

а разность  $\Delta m = Zm_p + Nm_n - M$  называется *дефектом массы*. Поэтому энергия покоя свободных протонов и нейтронов больше полной энергии составленного из них ядра. Величина

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2$$

называется *энергией связи ядра*: энергия связи ядра равна работе по расщеплению ядра на образующие его нуклоны.

Энергию связи ядра в расчете на один нуклон (*удельную энергию связи*) можно оценить с помощью соотношения неопределенностей (п. 7.4.1°): для модуля импульса нуклона имеем

$$p = h/R,$$

где  $R$  — радиус ядра. Соответствующее такому импульсу значение скорости нуклона массы  $m = 1,7 \cdot 10^{-24}$  г составляет несколько десятых долей скорости света. Поэтому его кинетическая энергия определяется нерелятивистским выражением и равна

$$E_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{h^2}{2mR^2} \approx 10 \text{ МэВ}.$$

Нуклон в ядре находится в связанном состоянии, поэтому глубина его потенциальной ямы имеет такой же порядок величины. Экспериментальное значение энергии связи в расчете на один нуклон для большинства ядер составляет 8 МэВ/нуклон. Сначала с ростом массового числа  $A$  она увеличивается от 1,1 МэВ/нуклон у ядра

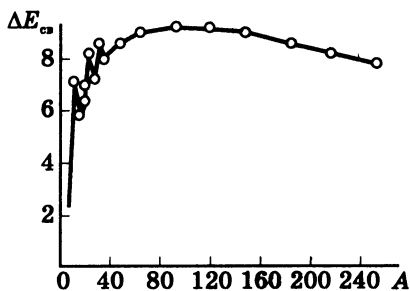


Рис. 7.8.

Энергия связи ядер в расчете на один нуклон

дейтерия  ${}^2_1\text{D}$  до 8,8 МэВ/нуклон у изотопа железа  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ , а затем постепенно убывает до 7,6 МэВ/нуклон у изотопа урана  ${}^{238}_{92}\text{U}$ . Здесь нижний индекс перед символом химического элемента — это зарядовое число  $Z$  (число протонов в ядре), верхний ин-

декс — массовое число  $A$  данного изотопа (число нуклонов в ядре). Зависимость энергии связи ядра в расчете на один нуклон от массового числа  $A$  показана на рис. 7.8. Характер этой зависимости объясняет выделение энергии при делении ядра урана на осколки, лежащие в середине Периодической системы элементов (п. 7.6.3°), и при синтезе легких ядер.

Энергия 10 МэВ составляет всего 1% от энергии покоя нуклона  $m_0c^2 = 1$  ГэВ. Поэтому действительно можно считать, что ядро состоит из отдельных нуклонов, которые сохраняют свою индивидуальность и внутри ядра.

Такие же доводы, основанные на соотношении неопределенностей, показывают, что в состав ядер не могут входить электроны: если электрон локализован в области размером  $R = 10^{-13}$  см, то с помощью (7.17) можно убедиться, что он будет ультрарелятивистским с энергией  $E_k \approx pc \approx 0,2$  ГэВ. Это огромное значение несовместимо с характерным значением энергии связи ядра в расчете на одну частицу.

Нуклоны внутри ядра связаны ядерными силами, которые обязаны своим происхождением *сильному взаимодействию*. Протон и нейтрон по способности к сильному взаимодействию не отличаются друг от друга. Ядерные силы существенно зависят от расстояния между нуклонами. На расстоянии  $10^{-13}$  см ядерные силы между нуклонами примерно в 135 раз больше сил электрического отталкивания между протонами и в  $10^{38}$  раз больше сил их гравитационного взаимодействия. На расстояниях, меньших  $0,7 \cdot 10^{-13}$  см, ядерные силы действуют как силы отталкивания, на расстояниях, больших  $0,7 \cdot 10^{-13}$  см, — как силы притяжения. На расстояниях, больших  $2 \cdot 10^{-11}$  см, их действие не проявляется.

Свойства ядерных сил можно описать в предположении, что входящие в состав ядра нуклоны обмениваются частицами — *мезонами*, массу которых можно оценить с помощью соотношения неопределенностей Бора — Гейзенберга: неопределенность в значении энергии ядра  $\Delta E$  при испускании частицы массой  $m$  равна  $\Delta E = mc^2$ . Эта неопределенность существует в течение времени  $\Delta t$  пролета мезона внутри ядра ( $\Delta t \leq R/c$ ).

Поскольку  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ , то  $m \approx \hbar(Rc) = 3 \cdot 10^{-25} \text{ г} = 300m_e$ , где  $m_e$  — масса электрона. Обнаруженные экспериментально в 1947 г., эти частицы получили название  $\pi$ -мезонов.

2°. Некоторые из тяжелых ядер (изотопы урана, тория, радия) самопроизвольно распадаются с образованием новых ядер и выделением  $\alpha$ -частиц — ядер атомов гелия-4 ( $\alpha$ -распад), электронов ( $\beta$ -распад) и фотонов большой энергии ( $\gamma$ -распад). Это свойство называется *естественной радиоактивностью*.

Радиоактивный распад не зависит от внешних условий — температуры, давления, химических взаимодействий. Изменение числа радиоактивных ядер со временем определяется выражением (п. М5.5.2°)

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/T},$$

где  $N_0$  — начальное число ядер в момент времени  $t = 0$ ,  $N$  — оставшееся число ядер в момент времени  $t$ ,  $T$  — *период полураспада* (время, в течение которого распадается половина ядер),  $\lambda$  — вероятность распада одного ядра за единицу времени (*постоянная распада*). Средним *временем жизни* ядра называется величина  $\tau = 1/\lambda$ . При распаде  $\alpha$ - и  $\gamma$ -частицы имеют дискретные значения энергии,  $\beta$ -частицы имеют непрерывный энергетический спектр, причем  $\beta$ -распад сопровождается испусканием нейтрино и антинейтрино (§ 7.7).

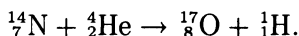
Новые ядра, получающиеся в результате радиоактивного распада, занимают в Периодической системе элементов другие места: при  $\alpha$ -распаде порядковый номер в таблице Д. И. Менделеева уменьшается на два, при  $\beta$ -распаде — увеличивается на единицу, испускание  $\gamma$ -квантов не сопровождается изменением порядкового номера. Это правило называется *законом смещения*.

3°. *Ядерная реакция* — взаимодействие атомного ядра с другим ядром или элементарной частицей (§ 7.7), в результате которого происходит преобразование ядер. Ядерные реакции происходят при сближении частиц на расстояние порядка  $10^{-13}$  см. При ядерных реакциях выполняются законы сохра-



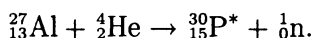
нения энергии, импульса, электрического заряда и числа нуклонов и могут образовываться новые радиоактивные изотопы, которых нет на Земле в естественном состоянии.

Первая искусственная ядерная реакция, осуществленная Резерфордом:

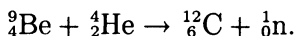


Верхний индекс (массовое число  $A$ ) показывает массу частицы, выраженную в атомных единицах массы (п. 3.2.2°), нижний (зарядовое число  $Z$ ) — заряд частицы, выраженный в элементарных зарядах.

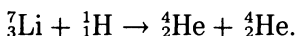
*Искусственная радиоактивность* — радиоактивность ядра, возникающая в результате ядерных реакций. Открыта на ядерной реакции



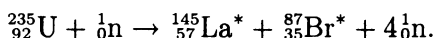
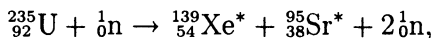
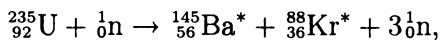
Радиоактивный изотоп фосфора  ${}^{30}_{15}\text{P}^*$  представляет собой источник  $\beta^+$ -излучения — его ядро испускает *позитрон* (античастицу электрона, см. § 7.7). Нейтрон открыт при изучении ядерной реакции



Первое расщепление ядра выполнено с помощью бомбардировки ядер лития искусственно разогнанными протонами:



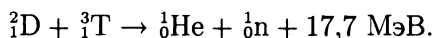
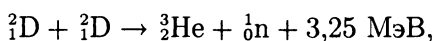
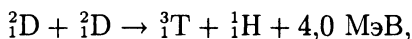
Деление урана: при облучении урана-235 нейтронами его ядро делится на радиоактивные осколки. При этом испускается несколько нейтронов и выделяется энергия:



При делении урана-235 может возникнуть *цепная реакция* — процесс, в котором определенная реакция вызывает следующие реакции такого же типа. Минимальная масса ура-

на, при которой возможна цепная реакция, называется *критической массой*. Цепная ядерная реакция используется в ядерном оружии и атомных электростанциях.

Синтез легких ядер возможен при их столкновении, для чего ядра следует разогнать до очень больших скоростей, чтобы преодолеть их кулоновское отталкивание (п. 4.1.1°). При синтезе легких ядер высвобождается еще больше энергии, чем при распаде тяжелых (п. 7.6.1°). Реакции синтеза:

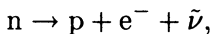


Для синтеза гелия из тяжелых изотопов водорода — дейтерия и трития — требуется температура порядка  $5 \cdot 10^7 \text{ К}$ , а синтез гелия из легкого изотопа водорода происходит при температуре около  $10^8 \text{ К}$ .

Синтез ядер используется в термоядерном оружии. Осуществление управляемой реакции синтеза ядер могло бы решить энергетическую проблему на Земле.

## 7.7. Элементарные частицы

Кроме элементарных частиц, входящих в состав атомов, — *протонов, нейтронов и электронов* — в настоящее время известно еще большое число элементарных частиц. Не все элементарные частицы стабильны. Например, электроны, вылетающие из ядра при  $\beta$ -распаде, образуются при распаде нейтрона:



нейтрон  $\rightarrow$  протон + электрон + антинейтрино.

Бета-распад — пример проявления *слабого взаимодействия*.

Современная систематика элементарных частиц представлена в приложении VII.

У большинства элементарных частиц существуют *античастицы*, которые обладают противоположными зарядами (элек-

трическим, барионным и т. д.). Частицы, совпадающие со своими античастицами, например фотон, называются истинно нейтральными. Античастицы обозначаются тильдой над символом частицы. При столкновении частицы с античастицей происходит их *аннигиляция*: обе частицы превращаются в  $\gamma$ -излучение или более легкие частицы (п. 7.3.2°). Обратный процесс называется процессом *образования пар*: например, если энергия пролетающего мимо ядра  $\gamma$ -кванта превышает 1,02 МэВ, то он может образовать электрон-позитронную пару.

Кроме частиц, представленных в приложении VII, открыто большое число частиц с очень малым временем жизни — порядка  $10^{-27}$  с. Они названы *резонансами*.

Сейчас развита теория, согласно которой все сильно взаимодействующие частицы — *адроны* (мезоны, барионы) — построены из более фундаментальных частиц, называемых *кварками*. Кварки обладают дробными электрическими зарядами, равными  $+2/3$  и  $-1/3$  элементарного заряда. Кварки не существуют в свободном состоянии, хотя их наличие внутри нуклонов подтверждено прямым «просвечиванием» нуклонов высокоэнергетическими электронами.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## I. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ (по ГСССД 1–87)

Универсальные константы	
Скорость света в вакууме	$c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 =$ $= 12,566370614 \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} =$ $= 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Гравитационная постоянная	$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Планка	$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Электромагнитные константы	
Элементарный заряд	$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Квант магнитного потока $h/2e$	$\Phi_0 = 2,06783461 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}$
Магнетон Бора $e\hbar/2m_e$	$\mu_B = 9,2740154 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Ядерный магнетон $e\hbar/2m_p$	$\mu_N = 5,0507866 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}$
Атомные константы	
Постоянная тонкой структуры $\mu_0 e^2 / 2h$	$\alpha = 7,29735308 \cdot 10^{-3}$ $\alpha^{-1} = 137,0359895$
Постоянная Ридберга $m_e c \alpha^2 / 2h$ в электрон-вольтах $R_\infty h c / \{e\}$	$R_\infty = 10\,973\,731,534 \text{ м}^{-1}$ $R_\infty = 13,6056981 \text{ эВ}$
Боровский радиус $\alpha / (4\pi R_\infty)$	$a_0 = 0,529177249 \cdot 10^{-10} \text{ м}$

Масса покоя электрона	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Отношение заряда электрона к его массе	$-e/m_e = -1,75881962 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Комптоновская длина волны электрона $h/(m_e c)$	$\lambda_e = 2,42631058 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Классический радиус электрона $\alpha^2 a_0$	$r_e = 2,81794092 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726231 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Отношение массы протона к массе электрона	$m_p/m_e = 1836,152701$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749286 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя дейтрона	$m_d = 3,3435860 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
<b>Физико-химические константы</b>	
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Атомная единица массы $1 \text{ а. е. м.} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) \equiv m_{\text{а. е. м.}}$	$1 \text{ а. е. м.} = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Постоянная Фарадея	$F = 96\,485,309 \text{ Кл/моль}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,314510 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Постоянная Больцмана $R/N_A$	$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Молярный объем идеального газа $RT/p$ при нормальных условиях ( $T = 273,15 \text{ К}$ , $p = 101\,325 \text{ Па}$ )	$V_m = 22,414 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-3}/\text{моль}$
Постоянная Лошмидта $N_A/V_m$	$n_0 = 2,686763 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$

<b>Формулы, связывающие некоторые фундаментальные физические константы (в гауссовой системе)</b>	
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$
Магнетон Бора	$\mu_B = e\hbar / (2m_e c)$
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = e^2 / (\hbar c)$
Постоянная Ридберга	$R_\infty = m_e e^4 / 2\hbar^2$
Боровский радиус	$a_0 = \hbar^2 / (m_e e^2)$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_e = \hbar / (m_e c)$
Классический радиус электрона	$r_e = e^2 / (m_e c^2)$
Постоянная Фарадея	$F = eN_A$
Универсальная газовая постоянная	$R = kN_A$
Формулы в СИ, выражающие $\alpha$ , $R_\infty$ , $a_0$ , $\lambda_e$ , $e_e$ через фундаментальные константы, получаются из приведенных выше заменой $e^2 \rightarrow e^2 / (4\pi\varepsilon_0)$ .	

## II. ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЕДИНИЦЫ В СИ

Величина	Размерность	Единица			
		наименование	обозначение		определение
			международное	русское	
Основные единицы					
Длина	$L$	метр	m	м	Длина пути, проходимого светом в вакууме за 1/299 792 458 секунды
Масса	$M$	килограмм	kg	кг	Масса, равная массе международного прототипа килограмма
Сила электрического тока	$I$	ампер	A	А	Сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум прямым параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины

Величина	Размерность	Единица			определение
		наименование	обозначение		
			международное	русское	
Время	$T$	секунда	s	с	Время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Термодинамическая температура	$\theta$	кельвин	K	К	1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды
Количество вещества	$N$	моль	mol	моль	Количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде углерода-12 массой 0,012 кг
Сила света	$J$	кандела	cd	кд	Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет (1/683) Вт/ср



Величина	Размерность	Единица			определение
		наименование	обозначение		
			международное	русское	
Дополнительные единицы					
Плоский угол	—	радиан	rad	рад	Угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу
Телесный угол	—	стерадиан	sr	ср	Телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы
Производные единицы					
Скорость	$LT^{-1}$	метр в секунду	m/s	м/с	Скорость равномерного движения, при котором за 1 с преодолевается расстояние 1 м
Ускорение	$LT^{-2}$	метр на секунду в квадрате	m/s <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>	Ускорение равноускоренного движения, при котором за 1 с скорость изменяется на 1 м/с

Величина	Размерность	Единица			определение
		наименование	обозначение		
			международное	русское	
Угловая скорость	$T^{-1}$	радиан в секунду	rad/s	рад/с	Угловая скорость равномерного вращения, при котором за 1 с совершается поворот на 1 рад
Частота	$T^{-1}$	герц	Hz	Гц	Частота процесса, 1 цикл которого совершается за 1 с
Плотность	$ML^{-3}$	килограмм на кубический метр	kg/m <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>	Плотность вещества, содержащего 1 кг в объеме 1 м <sup>3</sup>
Импульс	$MLT^{-1}$	килограмм на метр в секунду	kg · m/s	кг · м/с	Импульс тела массой 1 кг при скорости 1 м/с
Сила	$MLT^{-2}$	ньютон	N	Н	Сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с <sup>2</sup>
Давление	$ML^{-1}T^{-2}$	паскаль	Pa	Па	Давление, создаваемое силой 1 Н на площади 1 м <sup>2</sup>
Работа, энергия, количество теплоты	$ML^2T^{-2}$	джоуль	J	Дж	Работа силы 1 Н при перемещении 1 м вдоль направления силы

Величина	Размерность	Единица			
		наименование	обозначение		определение
			международное	русское	
Мощность	$ML^2T^{-3}$	ватт	W	Вт	Мощность, при которой за 1 с совершается работа 1 Дж
Удельная теплоемкость	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	J/(kg · K)	Дж/(кг · K)	Теплоемкость 1 кг вещества, температура которого повышается на 1 K при сообщении количества теплоты 1 Дж
Количество электричества, электрический заряд	$TI$	кулон	C	Кл	Количество электричества, проходящее за 1 с через поперечное сечение при силе тока 1 А
Напряженность электрического поля	$MLT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	V/m	В/м	Напряженность однородного электрического поля, в котором разность потенциалов между двумя точками, удаленными на 1 м вдоль линии напряженности, равна 1 В
Разность потенциалов	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	вольт	V	В	Напряжение между точками цепи, где развивается мощность 1 Вт при силе тока 1 А

Величина	Размерность	Единица			
		наименование	обозначение		определение
			международное	русское	
Электрическая емкость	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	фарад	Ф	Ф	Емкость конденсатора, на котором заряд 1 Кл создает напряжение 1 В
Электрическое сопротивление	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	ом	$\Omega$	Ом	Сопротивление участка цепи, в котором напряжение 1 В вызывает ток 1 А
Удельное электрическое сопротивление	$ML^3T^{-3}I^{-2}$	ом-метр	$\Omega \cdot м$	Ом $\cdot м$	Удельное сопротивление вещества, проводник из которого длиной 1 м с площадью поперечного сечения 1 м <sup>2</sup> обладает сопротивлением 1 Ом
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Т	Тл	Магнитная индукция, при которой магнитный поток через поперечное сечение 1 м <sup>2</sup> равен 1 Вб
Магнитный поток	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	вебер	Wb	Вб	Магнитный поток, убывание которого до нуля вызывает в сцепленной с ним электрической цепи сопротивлением 1 Ом прохождение заряда 1 Кл

Величина	Размерность	Единица			
		наименование	обозначение		определение
			международное	русское	
Индуктивность	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	генри	Н	Гн	Индуктивность контура, с которым сцеплен магнитный поток 1 Вб при силе тока в контуре 1 А
Световой поток	$J$	люмен	lm	лм	Световой поток в телесный угол 1 ср при силе света 1 кд
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	lx	лк	Освещенность поверхности площадью 1 м <sup>2</sup> при падении на нее светового потока 1 лм

### III. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ СИ И ГАУССОВОЙ СИСТЕМЫ

Величина	Единица		Отношение единиц
	СИ	гауссова система	
Длина	м	см	$10^2$
Время	с	с	1
Скорость	м/с	см/с	$10^2$
Ускорение	м/с <sup>2</sup>	см/с <sup>2</sup>	$10^2$
Частота колебаний	Гц	Гц	1
Круговая частота	с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>	1
Угловая скорость	рад/с	рад/с	1
Угловое ускорение	рад/с <sup>2</sup>	рад/с <sup>2</sup>	1
Масса	кг	г	$10^3$
Плотность	кг/м <sup>3</sup>	г/см <sup>3</sup>	$10^{-3}$
Сила	Н	дин	$10^5$
Давление, напряжение	Па	дин/см <sup>2</sup>	10
Импульс	кг · м/с	г · см/с	$10^5$
Момент силы	Н · м	дин · см	$10^7$
Энергия, работа	Дж	эрг	$10^7$
Мощность	Вт	эрг/с	$10^7$
Плотность потока энергии	Вт/м <sup>2</sup>	эрг/(с · см <sup>2</sup> )	$10^3$
Момент импульса	кг · м <sup>2</sup> /с	г · см <sup>2</sup> /с	$10^7$

Величина	Единица		Отношение единиц
	СИ	гауссова система	
Момент инерции	кг · м <sup>2</sup>	г · см <sup>2</sup>	10 <sup>7</sup>
Вязкость	Па · с	П	10
Температура	К	К	1
Теплоемкость, энтропия	Дж/К	эрг/К	10 <sup>7</sup>
Количество электричества	Кл	СГСЭ-ед.	3 · 10 <sup>9</sup>
Потенциал	В	СГСЭ-ед.	1/300
Напряженность электрического поля	В/м	СГСЭ-ед.	1/(3 · 10 <sup>4</sup> )
Емкость	Ф	см	9 · 10 <sup>11</sup>
Сила тока	А	СГСЭ-ед.	3 · 10 <sup>9</sup>
Плотность тока	А/м <sup>2</sup>	СГСЭ-ед.	3 · 10 <sup>5</sup>
Сопротивление	Ом	СГСЭ-ед.	1/(9 · 10 <sup>11</sup> )
Удельное сопротивление	Ом · м	СГСЭ-ед.	1/(9 · 10 <sup>9</sup> )
Проводимость	См	СГСЭ-ед.	9 · 10 <sup>11</sup>
Магнитная индукция	Тл	Гс	10 <sup>4</sup>
Магнитный поток	Вб	Мкс	10 <sup>8</sup>
Индуктивность	Гн	см	10 <sup>9</sup>
Сила света	кд	кд	1
Световой поток	лм	лм	1

#### IV. ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВНЕСИСТЕМНЫХ ЕДИНИЦ В ЕДИНИЦАХ СИ

Величина	Единица	Содержит ед. СИ
Длина	ангстрем ( $\text{\AA}$ )	$10^{-10}$ м
	астрономическая единица (а. е.)	$1,49597870 \cdot 10^{11}$ м
	световой год (св. год)	$9,460530 \cdot 10^{15}$ м
	парсек (пк)	$3,085678 \cdot 10^{16}$ м
Масса	атомная единица массы (а. е. м.)	$1,6605402 \cdot 10^{-27}$ кг
Площадь	барн (б)	$10^{-28}$ м <sup>2</sup>
Объем	литр (л)	$10^{-3}$ м <sup>3</sup>
Сила	килограмм-сила (кгс)	9,80665 Н
Работа, энергия	килограмм-сила-метр (кгс · м)	9,80665 Дж
	киловатт-час (кВт · ч)	$3,6 \cdot 10^6$ Дж
	лошадиная сила-час (л. с. · ч)	$2,64780 \cdot 10^6$ Дж
	электрон-вольт (эВ)	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$ Дж
Мощность	лошадиная сила (л. с.)	735,489 Вт
Количество электричества, электрический заряд	ампер-час (а · ч)	3600 Кл
Удельное электрическое сопротивление	ом-квадратный миллиметр на метр (Ом · мм <sup>2</sup> /м)	$10^{-6}$ Ом · м
Количество теплоты	калория (кал)	4,1868 Дж
Температура Цельсия	градус Цельсия ( $^{\circ}$ С)	$\frac{t}{^{\circ}\text{С}} = \frac{T}{K} - 273,15$



Величина	Единица	Содержит ед. СИ
Удельная теплоемкость	калория на грамм-градус Цельсия (кал/(г · ° С))	$4,1868 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)
Давление	миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.), торр (Торр)	133,322 Па
	физическая атмосфера (атм)	101 325 Па
Оптическая сила	диоптрия (дптр)	$1 \text{ м}^{-1}$

## V. МНОЖИТЕЛИ И ПРИСТАВКИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ СИ

Множитель	Приставка		Множитель	Приставка	
	наименование	обозначение		наименование	обозначение
$10^{18}$	экса	Э	$10^{-1}$	деци	д
$10^{15}$	пета	П	$10^{-2}$	санти	с
$10^{12}$	тера	Т	$10^{-3}$	милли	м
$10^9$	гига	Г	$10^{-6}$	микро	мк
$10^6$	мега	М	$10^{-9}$	нано	н
$10^3$	кило	к	$10^{-12}$	пико	п
$10^2$	гекто	г	$10^{-15}$	фемто	ф
$10^1$	дека	да	$10^{-18}$	атто	а

# VI. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ ЕДИНИЦ И В СИ

Наименование	Гауссова система	СИ
Закон Кулона	$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Напряженность электрического поля (определение)	$E = \frac{F}{q}$	
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{q}{r^2}$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Напряженность поля вблизи поверхности проводника	$E = 4\pi\sigma$	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Поток напряженности электрического поля через поверхность	$\Phi_E = \sum E_n \Delta S$	
Теорема Гаусса	$\Phi_E = 4\pi q$	$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$
Потенциал электрического поля (определение)	$\varphi = \frac{A}{q}$	
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{q}{r}$	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$
Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля	$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$	
Емкость (определение)	$C = \frac{q}{U}$	
Емкость плоского конденсатора с диэлектриком	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$
Энергия системы зарядов	$W_\Sigma = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$	
Энергия конденсатора	$W_\Sigma = \frac{1}{2} CU^2$	
Плотность энергии электрического поля	$w_\Sigma = \frac{E^2}{8\pi}$	$w_\Sigma = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$
Сила тока	$I = \frac{dq}{dt}$	

Наименование	Гауссова система	СИ
Закон Ома	$I = \frac{U}{R}$	
Закон Джоуля — Ленца	$Q = I^2 R t$	
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме	$F = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2 l}{r}$	$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 l}{r}$
Закон Био — Савара — Лапласа	$\Delta B = \frac{1}{c} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}$	$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}$
Индукция магнитного поля прямого тока	$B = \frac{1}{c} \frac{2I}{r}$	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$
Индукция магнитного поля в центре кругового тока	$B = \frac{1}{c} \frac{2\pi I}{R}$	$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$
Индукция поля в соленоиде	$B = \frac{4\pi}{c} n I$	$B = \mu_0 n I$
Циркуляция вектора $\mathbf{B}$	$\sum B_i \Delta l = \frac{4\pi}{c} I$	$\sum B_i \Delta l = \mu_0 I$
Закон Ампера	$F = \frac{1}{c} I B l \sin \alpha$	$F = I B l \sin \alpha$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = \frac{1}{c} q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Поток магнитной индукции (определение)	$\Phi = \sum B_n \Delta S$	
Закон электромагнитной индукции	$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$	$E = -\frac{d\Phi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$\Phi = \frac{1}{c} L I$	$\Phi = L I$
Индуктивность соленоида	$L = 4\pi n^2 V$	$L = \mu_0 n^2 V$
Магнитная энергия тока (энергия магнитного поля)	$W_m = \frac{1}{c^2} \frac{L I^2}{2}$	$W_m = \frac{L I^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w_m = \frac{B^2}{8\pi}$	$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$

## VII. ТАБЛИЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Наименование	Символ		Масса в элект- ронных массах	Элект- риче- ский заряд	Время жизни, с
	час- тица	анти- час- тица			
<b>Фотон</b>	$\gamma$	$\gamma$	0	0	Стабилен
<b>Лептоны</b>					
Нейтрино электронное	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0 ( $< 6 \cdot 10^{-5}$ )	0	Стабильно
Нейтрино мюонное	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0 ( $< 1$ )	0	Стабильно
Тау-нейтрино	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0 ( $< 500$ )	0	Стабильно
Электрон	$e^-$	$e^+$	1	-1	Стабилен
Мюон	$\mu^-$	$\mu^+$	207	-1	$2,2 \cdot 10^{-6}$
Тау-лептон	$\tau^-$	$\tau^+$	3492	-1	$3 \cdot 10^{-13}$
<b>Мезоны</b>					
Пи-мезоны (пионы)	$\pi^0$	$\pi^0$	264,1	0	$0,83 \cdot 10^{-16}$
	$\pi^+$	$\pi^+$	273,1	1	$2,6 \cdot 10^{-8}$
Ка-мезоны (каоны)	$K^+$	$K^-$	966,4	1	$1,2 \cdot 10^{-8}$
	$K^0$	$K^0$	974,1	0	$8,9 \cdot 10^{-11}$ ( $K_s^0$ ) $5,2 \cdot 10^{-8}$ ( $K_L^0$ )
Эта-нуль-мезон	$\eta^0$	$\eta^0$	1074	0	$7 \cdot 10^{-19}$
<b>Барионы</b>					
Протон	p	$\bar{p}$	1836,1	1	Стабилен (?)
Нейтрон	n	$\bar{n}$	1838,6	0	$10^3$
Лямбда-гиперон	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}$	2183,1	0	$2,63 \cdot 10^{-10}$
Сигма-гипероны	$\Sigma^+$	$\bar{\Sigma}^+$	2327,6	1	$8 \cdot 10^{-11}$
	$\Sigma^0$	$\bar{\Sigma}^0$	2333,6	0	$5,8 \cdot 10^{-20}$
	$\Sigma^-$	$\bar{\Sigma}^-$	2343,1	-1	$1,48 \cdot 10^{-10}$
Кси-гипероны	$\Xi^0$	$\bar{\Xi}^0$	2572,8	0	$2,9 \cdot 10^{-10}$
	$\Xi^-$	$\bar{\Xi}^-$	2585,6	-1	$1,64 \cdot 10^{-10}$
Омега-минус-гиперон	$\Omega^-$	$\bar{\Omega}^-$	3273	-1	$8,2 \cdot 10^{-11}$

# VIII. НАЗВАНИЯ, СИМВОЛЫ И АТОМНЫЕ МАССЫ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

1	Водород	H	1,0079	27	Кобальт	Co	58,9332
2	Гелий	He	4,00260	28	Никель	Ni	58,71
3	Литий	Li	6,941	29	Медь	Cu	63,546
4	Бериллий	Be	9,01218	30	Цинк	Zn	65,38
5	Бор	B	10,81	31	Галлий	Ga	69,735
6	Углерод	C	12,011	32	Германий	Ge	72,59
7	Азот	N	14,0067	33	Мышьяк	As	74,9216
8	Кислород	O	15,9994	34	Селен	Se	78,96
9	Фтор	F	18,998403	35	Бром	Br	79,904
10	Неон	Ne	20,179	36	Криптон	Kr	83,80
11	Натрий	Na	22,98977	37	Рубидий	Rb	85,467
12	Магний	Mg	24,305	38	Стронций	Sr	87,62
13	Алюминий	Al	26,98154	39	Иттрий	Y	88,9059
14	Кремний	Si	28,0855	40	Цирконий	Zr	91,22
15	Фосфор	P	30,97376	41	Ниобий	Nb	92,9064
16	Сера	S	32,06	42	Молибден	Mo	95,94
17	Хлор	Cl	35,453	43	Техниций	Te	98,9062
18	Аргон	Ar	39,948	44	Рутений	Ru	101,07
19	Калий	K	39,0983	45	Родий	Rh	102,9055
20	Кальций	Ca	40,08	46	Палладий	Pd	106,4
21	Скандий	Sc	44,9559	47	Серебро	Ag	107,868
22	Титан	Ti	47,90	48	Кадмий	Cd	112,41
23	Ванадий	V	50,9415	49	Индий	In	114,82
24	Хром	Cr	51,996	50	Олово	Sn	118,69
25	Марганец	Mn	54,9380	51	Сурьма	Sb	121,75
26	Железо	Fe	55,847	52	Теллур	Te	127,60

53	Иод	I	126,9045	80	Ртуть	Hg	200,59
54	Ксенон	Xe	131,30	81	Таллий	Tl	204,37
55	Цезий	Cs	132,9054	82	Свинец	Pb	207,2
56	Барий	Ba	137,33	83	Висмут	Bi	208,9804
57	Лантан	La	138,9055	84	Полоний	Po	[209]
58	Церий	Ce	140,12	85	Астат	At	[210]
59	Празеодим	Pr	140,9077	86	Радон	Rn	[222]
60	Неодим	Nd	144,24	87	Франций	Fr	[223]
61	Прометий	Pm	[145]	88	Радий	Ra	226,0254
62	Самарий	Sm	150,4	89	Актиний	Ac	[227]
63	Европий	Eu	151,96	90	Торий	Th	231,0381
64	Гадолиний	Gd	157,25	91	Протактиний	Pa	231,0359
65	Тербий	Tb	158,9254	92	Уран	U	238,029
66	Диспрозий	Dy	162,50	93	Нептуний	Np	237,0482
67	Гольмий	Ho	164,9304	94	Плутоний	Pu	[244]
68	Эрбий	Er	167,26	95	Америций	Am	[243]
69	Тулий	Tm	168,9342	96	Кюрий	Cm	[247]
70	Иттербий	Yb	173,04	97	Берклий	Bk	[247]
71	Лютеций	Lu	174,967	98	Калифорний	Cf	[251]
72	Гафний	Hf	178,49	99	Эйнштейний	Es	[254]
73	Тантал	Ta	180,947	100	Фермий	Fm	[257]
74	Вольфрам	W	183,85	101	Менделевий	Md	[258]
75	Рений	Re	186,207	102	(Нобелий)	(No)	[259]
76	Осмий	Os	190,2	103	(Лоуренсий)	(Lr)	[260]
77	Иридий	Ir	192,22	104	Резерфордий	Rf	[261]
78	Платина	Pl	195,09	105	Дубний	Db	[262]
79	Золото	Au	196,9665	106	Сиборгий	Sg	[265]

# IX. ТАБЛИЦА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел	$\in$ — принадлежит
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел	$\notin$ — не принадлежит
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел	$\emptyset$ — пустое множество
$\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел	$\cup$ — объединение (множеств)
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел	$\cap$ — пересечение (множеств)
$\max$ — максимум (функции)	$\subset$ — символ подмножества
$\min$ — минимум (функции)	$\Rightarrow$ — следует, $\Leftrightarrow$ — равносильно
$f'(x)$ — производная функции $f(x)$	$\lim$ — предел (функции, последовательности)
$\int$ — неопределенный интеграл	$C_n^m$ — число сочетаний
$\int_a^b$ — определенный интеграл	$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ — действительная и мнимая части комплексного числа $z$
$\sum_{k=1}^n$ — сумма от 1-го до $n$ -го членов	$ z , \arg z$ — модуль и аргумент комплексного числа $z$
$n!$ — факториал	$\widehat{(a; b)}$ — угол между векторами $a$ и $b$
$A_n^m$ — число размещений	$\langle A \rangle$ — математическое ожидание (среднее значение) случайной величины $A$
$\pi = 3,14159265358979 \dots$	$e = 2,718281828459045 \dots$

**ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ**

- Абсолютная величина 31  
Абсолютно  
— неупругий удар 278  
— твердое тело 258, 282  
— упругий удар 278  
Адиабатический процесс 311  
Адроны 498  
Алгебраическое уравнение 45  
Алгоритм Евклида 21  
Ампер 240  
Амперметр 357  
Амплитуда 385  
Анизотропия 335  
Анионы 365  
Аннигиляция 476, 480, 498  
Анод 365  
Античастица 497  
Апофема 160, 175  
Аргумент 22, 125  
Арифметическая прогрессия 79  
Асимптота 167  
Астигматический пучок лучей 439, 440  
Атом 487  
— водорода 487  
Атомная единица массы 261  
  
Безразличное равновесие 285  
Биения 409  
Биквадратное уравнение 40  
Бином Ньютона 120  
Биномиальное распределение 206, 326  
  
Биссектриса 151, 154, 155  
Боровский радиус 488  
Броуновское движение 317  
  
Вектор 133  
— собственный 225  
Векторная диаграмма 373, 374, 386, 397  
Векторное произведение 138  
Векторы  
— коллинеарные 135  
— компланарные 135  
Вероятность 203, 489  
— условная 205  
Вещественные числа 22  
Влажность  
— абсолютная 331  
— относительная 331  
Внешние параметры 304  
Внешние силы 271  
Внутреннее сопротивление 357  
Внутренние параметры 304  
Вогнутое зеркало 441, 442  
Возрастающая функция 24  
Волновые  
— группы 434  
— импульсы 415  
— пакеты 415  
— поверхности 421  
Волны  
— де Бройля 484  
— капиллярные 432  
— монохроматические 415  
— на воде 431



- одиночные 415
- плоские 421, 458
- поперечные 414, 417, 418
- продольные 414, 418
- стоячие 412, 424
- сферические 421, 430
- тяжелые 432
- электромагнитные 381, 414, 428–431
- Вольтметр 357
- Вписанный угол 163, 164
- Вращение вокруг оси 258
- Времениподобный интервал 475
- Время
  - жизни ядра 495
  - затухания 393
  - релаксации 250, 303
- Всестороннее сжатие 337
- Вынужденное излучение 451
- Вынужденные колебания 383, 395–401, 410–411
- Выпуклая поверхность 180
- Выпуклое зеркало 442, 443
- Выпуклый многоугольник 159
- Вырождение частот 405
- Высота звука 419
- Высшие гармоники 413
- Вязкое трение 392
  
- Газ
  - идеальный 319, 329
  - реальный 249, 328
- Газовые законы 305
- Газовый термометр 306
- Гармоники 413
- Гармонические колебания 383, 385, 387
- Гаусс 239
- Генератор 404
- Геометрическая прогрессия 80
- Гетерогенные системы 307
- Гидравлический пресс 291
- Гидравлическое сопротивление 300
- Гидростатические весы 292
- Гидростатический парадокс 292
- Гидростатическое давление 291
- Гипербола 32, 167
- Гиперболические функции 34
- Гирискосп 289
- Главное значение 126, 130, 131
- Глубина резкости 446
- Голография 464–467
- Гомогенные системы 307
- Гомоцентрический пучок лучей 439
- Гравитационная постоянная 264
- Градус 151
- Грань многогранника 172
- График функции 23
- Групповая скорость волн 433
- Группы волн 434
  
- Давление 303
  - гидростатическое 291
  - жидкости 290, 291
  - капиллярное 334
  - насыщенного пара 331
  - парциальное 330

- света 430, 485
- электромагнитной волны 430
- Двугранный угол 170
- Действительные числа 22
- Действующие значения напряжения и тока 378
- Декремент затухания 393
- Деление
  - с остатком 20, 42
  - ядра 496
- Десятичная дробь 10
- Дефект массы 493
- Дефекты в кристаллах 336
- Деформации
  - пластические 336
  - упругие 336
- Деформация
  - кручения 339
  - растяжения 336
  - сдвига 337
- Диагональ 160–162, 212
- Диагональный вид 226
- Диамагнетизм 369
- Диамагнетики 369
- Диаметр 163, 178
- Динамическое демпфирование 411
- Диоптрия 444
- Диполь 347
- Директриса 167
- Дискретная случайная величина 208
- Дискриминант 30, 39
- Дисперсия
  - волн 417, 432
  - света 436, 464
  - случайной величины 210
- Диссипация энергии 392
- Дифрагировавшие лучи 459
- Дифракционная
  - расходимость 460
  - решетка 462
- Дифракция
  - волн 425
  - Фраунгофера 460, 461
  - Френеля 460
- Дифференциальное уравнение 99–104, 201–202
- Дифференцирование 98
- Диффузия 316
- Диэлектрическая проницаемость 345, 349
- Длина волны 416
  - де Бройля 483
- Добавочное сопротивление 358
- Добротность 393, 398
- Додекаэдр 175
- Домены 370
- Дробь 6
  - десятичная 10
- Дуга 163
- Единицы измерения физических величин 233
  - основные 234
  - производные 234
- Емкость 350
- Естественная радиоактивность 495

Жесткий режим возбуждения 404

Задача

- Коши 102, 201
- краевая 103

Закон

- Авогадро 320
- Ампера 238, 239
- Архимеда 292
- Био — Савара — Лапласа 238
- Бойля — Мариотта 305
- больших чисел 208
- всемирного тяготения 264, 267
- Гаусса 381
- Гей-Люссака 305
- Гука 277, 336
- Дальтона 320, 330
- движения центра масс 273, 287
- Джоуля — Ленца 362
- инерции 260
- Кулона 344, 381
- Кулона — Амонтонна 269
- Ома 354, 376
  - для неоднородной цепи 359
- отражения
  - волн 422
  - света 437
- Паскаля 290
- подобия 300
- преломления
  - волн 422
  - света 438
- пропорциональности массы и энергии 476

- прямолинейного распространения света 437
- смещения 495
- Снеллиуса 438
- сохранения
  - заряда 344
  - импульса 272
  - механической энергии 278
  - момента импульса 280
  - энергии 308
- Шарля 306
- эквивалентности массы и энергии 477
- электромагнитной индукции 370, 382

Законы

- Кеплера 280
- Фарадея 365, 370
- газовые 305
- фотоэффекта 485

Замкнутая система 274, 302

Затухание колебаний 387, 392–395

Зеркало

- вогнутое 441, 442
  - выпуклое 442, 443
  - гиперболическое 166, 167
  - параболическое 166, 167
  - плоское 440
  - сферическое 441
  - эллиптическое 166
- Зрительная труба 450, 462

Идеальная жидкость 295

Идеальный газ 319, 329

Излучение

- Вавилова — Черенкова 427
- вынужденное 451

- когерентное 452
- равновесное 492
- черное 492
- электромагнитных волн 429
- Измерение
  - расстояний 472
  - сил 261
  - сопротивлений 358
  - физических величин 232
- Изобарический процесс 311
- Изотермический процесс 311
- Изотопы 492
- Изотропность пространства 469
- Изохорический процесс 310
- Изохронность гармонического осциллятора 389
- Икосаэдр 175
- Импеданс 376
- Импульс
  - волновой 415
  - релятивистский 475
  - силы 272
  - системы частиц 271, 273
  - электромагнитной волны 429
- Инвариантность электромагнитного поля 380
- Индуктивность 371
  - соленоида 372
- Индукция магнитного поля 366
- Инертность 261
- Интеграл 105, 107, 108, 193
  - несобственный 110
- Интегральный признак Коши 116
- Интегрирование по частям 106
- Интенсивные параметры 304
- Интервал 18, 474
  - времениподобный 475
  - пространственноподобный 475
- Интерполяция 190
- Интерференционная картина 423, 453
- Интерференционные полосы 451
- Интерференция
  - волн 423
  - многолучевая 457
- Интерферометр 455
  - Фабри — Перо 457
- Инфразвук 419
- Иррациональные
  - уравнения 47
  - числа 21
- Искусственная радиоактивность 496
- Испарение 330
- Кандела 467
- Капиллярное давление 334
- Капиллярные
  - волны 432
  - явления 334
- Касательная 95, 163, 165, 180
- Катет 156
- Катионы 365
- Катод 365
- Квадрант 65, 126, 141
- Квадрат 162
- Квадратичная форма 227
- Квадратное уравнение 39
- Квадратный трехчлен 29

- Квазистатистический процесс 308  
Кварки 498  
Килограмм 237  
Кинетическая энергия 275, 477  
— твердого тела 288  
Кипение 331  
Когерентное излучение 452  
Когерентные источники 423  
Колебания  
— вынужденные 383, 395–401, 410–411  
— гармонические 383, 385, 387  
— модулированные 409, 410  
— нормальные 407, 425  
— плазменные 251  
— свободные 383  
— установившиеся 395  
Количество вещества 318  
Коллиматор 464  
Коллинеарные векторы 135  
Кольца Ньютона 456  
Компланарные векторы 135  
Комплексное сопротивление 376  
Комплексные числа 123  
Компоненты термодинамической системы 307  
Конденсатор 350  
— плоский 351  
— сферический 351  
— цилиндрический 351  
Конденсор 447  
Консервативные системы 278, 387  
Конус 176  
— Маха 426, 427  
— усеченный 177  
Концентрация 319  
Координаты 141–144  
Корпускулярно-волновой дуализм 482  
Косинус 63, 65  
Космические скорости 281  
Котангенс 63, 65  
Коэффициент  
— истечения 297  
— полезного действия 312  
— Пуассона 337  
— трения 269  
— холодильный 314  
Краевой угол 334  
Красная граница фотоэффекта 485  
Кривая видности 467  
Кривизна  
— кривой 168  
— поверхности 180  
Криволинейная трапеция 108  
Кристаллическая решетка 335  
Кристаллы 335  
Критерий  
— Рэлея 462  
Критическая  
— изотерма 328  
— масса 497  
— температура 328, 331  
Критические точки функции 97  
Критическое  
— затухание 394  
— состояние 329

- Круг 163  
Круговая  
— поляризация 429  
— частота 385  
Круговой процесс 308  
Куб 173, 175
- Лазер 451  
Линейная  
— поляризация 429  
— функция 29  
Линейное уравнение 38  
Линейный осциллятор 391  
Линза  
— рассеивающая 443, 445  
— собирающая 443, 444  
Линии  
— напряженности 346  
— равных фаз 421  
— тока 295  
Логарифм 35, 131  
Локализация интерференционных полос 455  
Лопиталья правило 90  
Луна 448  
Лучи 421  
Люкс 468  
Люмен 467
- Магические числа 492  
Магнитная  
— постоянная 240, 366  
— проницаемость 368–370  
Магнитный поток 370  
Максимум функции 97
- Масса  
— атомная 318  
— гравитационная 268  
— молярная 318  
— покоя 476, 477  
— релятивистская 477  
Массовое число 492  
Математическая индукция 15–16  
Математическое ожидание 209, 323  
Материальная точка 253  
Матрица 211  
Мгновенная ось вращения 259  
Медиана 154, 155  
Мезоны 494  
Метацентр 293  
Метод  
— Гаусса 52  
— интервалов 50, 59  
— итераций 198  
— наименьших квадратов 192  
— Ньютона 199  
— Рунге — Кутты 202  
— Эйлера 201  
Метр 237  
Механическая энергия 277  
Механическое состояние 265  
Микроскоп 448  
Минимум функции 97  
Минор 218  
Мнимая единица 123  
Мнимое изображение 440  
Многогранник 172  
Многогранный угол 170  
Многочечевая интерференция 457

- Многоугольник 159  
— выпуклый 159  
Многочлены 40  
Множество 17  
Модель  
— атома 487  
— физическая 233  
Модулированное колебание 409, 410  
Модуль  
— всестороннего сжатия 337  
— кручения 339  
— сдвига 338  
— числа 31, 125  
— Юнга 336  
Моды колебания 407, 408, 425  
Моль 318  
Молярная масса 318  
Момент  
— импульса 280, 286  
— инерции 287  
— силы 282  
Монокристаллы 335  
Монотонная  
— последовательность 77  
— функция 24  
Монохроматические волны 415  
Мост Уитстона 358  
Мощность тока 362, 378  
Мягкий режим возбуждения 404  
  
Наибольшее значение 93  
Наименьшее значение 93  
Наклонная 170  
Напряжение 336, 346  
Напряженность электрического поля 345  
Насыщенный пар 330  
Натуральные числа 19  
Непрерывная  
— случайная величина 208  
— функция 92  
Неравенство 55  
— Бора — Гейзенберга 481  
Несобственный интеграл 110  
Неустойчивое равновесие 285  
Нечетная функция 26  
Нормальное распределение 209  
Нормальные колебания 407, 425  
Нуклоны 492  
  
Область  
— застоя 394  
— значений функции 23  
— определения функции 23  
Образование пар 498  
Обратимый процесс 308  
Обратная  
— матрица 215  
— связь 403  
— функция 27  
Обратные тригонометрические функции 69  
Объединение множеств 17  
Объектив 446, 448  
Объемная плотность энергии  
— магнитного поля 369  
— электрического поля 352  
Ограниченная функция 27  
Одиночные волны 415

- Одновременность событий 472
- Однородность
- времени 469
  - пространства 469
- Окрестность 76
- Округление чисел 14
- Окружность 162
- Октаэдр 175
- Опорная волна 465
- Определитель 51, 217
- Оптическая
- ось 441, 442
  - сила линзы 444
- Оптический
- диапазон 436, 490
  - центр
    - зеркала 441
    - линзы 443
- Оптическое изображение 441
- Опыт
- Майкельсона — Морли 471
  - Юнга 452, 453
- Ортогональность 152
- Ортоцентр 155
- Орты 137, 142
- Освещенность 468
- Остаток при делении 20, 42
- Осциллятор 387
- Относительный показатель преломления 438
- Отражение волн 422
- Отрезок 150
- Пар 330
- насыщенный 330
  - переохлажденный 330
  - пересыщенный 329
- Парабола 29, 167
- Параксиальные лучи 441
- Параллелепипед 173
- Параллелограмм 160
- Параллельная цепь 351, 356
- Параллельный перенос 145
- Парамагнетики 369
- Параметры
- внешние 304
  - внутренние 304
  - интенсивные 304
  - экстенсивные 304
- Парообразование 330
- Парциальная частота 411
- Парциальное давление 330
- Первообразная 104
- Перегретая жидкость 330
- Перемещение 145, 254
- Переохлажденный пар 330
- Пересечение множеств 18
- Перестановка 118
- Пересыщенный пар 329
- Переходные процессы 400
- Периметр 159
- Период
- дифракционной решетки 462
  - колебаний 383
- Периодическая
- дробь 13
  - функция 25
- Период полураспада 495
- Пирамида 174
- Плазменные колебания 251
- Планетарная модель атома 487
- Плоские волны 421, 458



- Плоское  
— движение 259  
— зеркало 440
- Плоскость 168  
— падения 422  
— фокальная 445
- Плотность 262, 292, 294  
— импульса 429  
— потока энергии 420, 429  
— распределения 208  
— тока 354  
— энергии 429  
— энергии волны 420
- Поверхностная энергия 333
- Поверхностное натяжение 333
- Поверхность  
— волновая 421  
— выпуклая 180
- Поверхность равных фаз 421
- Поворот 144
- Пограничный слой 299
- Погрешность 14, 184
- Подвижность 354
- Подобие 148, 149
- Позитрон 496
- Показательная функция 33
- Показатель преломления 436
- Поликристаллы 335
- Полное отражение 438
- Полосы  
— интерференционные 451  
— равного наклона 455  
— равной толщины 456
- Полутень 439
- Полюс зеркала 441
- Поляризация волн 415, 429
- Полярные координаты 143
- Поперечные волны 414, 417, 418
- Порядок интерференции 452
- Последовательная цепь 352, 356, 373, 377
- Последовательность 75  
— монотонная 77
- Постоянная  
— Авогадро 301  
— Больцмана 302, 327  
— распада 495  
— тонкой структуры 490  
— Фарадея 365  
— электрическая 241
- Постулаты  
— Бора 487  
— теории относительности 472
- Поступательное движение 258
- Потенциальная энергия 276
- Потенциал электрического поля 345
- Поток  
— излучения 467  
— напряженности электрического поля 381
- Правила  
— квантования 487  
— Кирхгофа 360
- Правило  
— левой руки 367, 368  
— Ленца 370  
— Лопиталья 90  
— правого винта 366  
— правой руки 371
- Превращение элементарных частиц 480
- Предел  
— последовательности 75  
— функции 82

- Предметная волна 465  
Преломление волн 422  
Преобразования  
— Галилея 470  
— движения 470  
— Лоренца 473  
— скорости 471, 474  
Прецессия 289  
Приближенные вычисления 15, 183  
Призма 172  
Признак Даламбера 115  
Принцип  
— Гюйгенса 422  
— Гюйгенса — Френеля 458  
— дополнительности 483  
— относительности 264, 380, 471  
— Паули 490  
— суперпозиции 346  
— волн 423  
Проводимость 354  
Прогрессия  
— арифметическая 79  
— геометрическая 80  
Продольные волны 414, 418  
Проекционный аппарат 447  
Проекция 135, 170, 171  
Произведение  
— векторное 138  
— скалярное 137  
Производная 95  
Промежуток 18  
Пропорция 9  
Просветление оптики 457  
Пространственноподобный интервал 475  
Пространство физическое 252  
Простые числа 19  
Протяженный источник 454  
Проценты 9  
Прямая 29, 150  
Прямоугольник 162  
Путь 254  
Пучность стоячей волны 412, 424  
Пятно Араго — Пуассона 460  
  
Работа 308  
— выхода 485  
— силы 275  
— тока 361  
Равновесие  
— безразличное 285  
— неустойчивое 285  
— термодинамическое 303  
— устойчивое 285  
Равновесное  
— излучение 492  
— состояние 302  
Равновесный процесс 308  
Равносильные уравнения 37  
Радиян 152  
Радиоактивность  
— естественная 495  
— искусственная 496  
Радиус-вектор 253  
Радиус кривизны 168, 181  
Разветвленные цепи 361  
Размерность физических величин 236, 244  
Размещения 119  
Разность хода 423, 452

- Разрешающая сила 462  
— спектральная 463
- Разрешение  
— микроскопа 449  
— оптической системы 462  
— телескопа 451
- Разрыв функции 93
- Распределение  
— биномиальное 206, 326  
— Больцмана 322, 324  
— Гиббса 321  
— Максвелла 321, 324  
— нормальное 209  
— случайной величины 208
- Распределения статистические 320
- Распределенные параметры 412
- Рассеивающая линза 443, 445
- Рациональные числа 21
- Реактивное движение 274
- Реальный газ 249, 328
- Ребро многогранника 172
- Режим возбуждения  
— жесткий 404  
— мягкий 404
- Резонанс 395–398, 410, 425  
— напряжений 377  
— токов 377
- Резонансы 498
- Резонатор 403
- Релятивистская масса 477
- Ромб 161
- Рунге — Кутта метод 202
- Ряд 114
- Самоиндукция 371
- Световой поток 467
- Световые лучи 436
- Светосила 447
- Свободные колебания 383
- Свойства симметрии законов природы 469
- Связанные маятники 408
- Сегмент 165
- Сектор 164
- Секунда 237
- Секущая 164
- Серия Бальмера 489
- Сила  
— Ампера 367  
— выталкивающая 292  
— Лоренца 368, 371  
— света 467  
— тока 353  
— электродвижущая 363
- Силы  
— внешние 271  
— непотенциальные 276  
— потенциальные 276  
— реакции 266, 283  
— сторонние 363, 370  
— трения 269, 270
- Сильное взаимодействие 494
- Симметрия 146–148
- Синус 63, 65
- Синхронизация часов 472
- Система  
— отсчета 252  
— гелиоцентрическая 261  
— инерциальные 260  
— уравнений 50, 216
- Скалярное произведение 137

- Скорость 254
  - волн 248, 417–418, 432–434
  - звука 248, 419
  - космическая 281
  - средняя 254
  - угловая 257
- Слабое взаимодействие 497
- Случайная величина 208
  - дискретная 208
  - непрерывная 208
- Случайное событие 202
- Смачивание 334
- Собирающая линза 443, 444
- Собственная длина 473
- Собственное
  - время 473
  - число 224
- Собственный вектор 225
- Событие 470
- Сокращение длины 473
- Соленоид 372
- Солитоны 435
- Соотношение
  - де Бройля 483
  - неопределенности Гейзенберга 481, 494
  - Планка 483
- Сопротивление 354
  - активное 372
  - внутреннее 357
  - гидравлическое 300
  - добавочное 358
  - емкостное 373
  - индуктивное 373
  - комплексное 376
  - реактивное 373
  - шунтирующее 357
- Сопряженное комплексное число 124
- Сочетания 119
- Спектр
  - частот 408, 413, 491
- Спектральная
  - плотность 491
  - разрешающая сила 463
  - световая эффективность 467
- Спектральный прибор 463
- Сплайн 191
- Среднее
  - арифметическое 79
  - геометрическое 80
- Средняя
  - линия 155, 162
  - скорость 254
- Статика 282
- Статистические распределения 320
- Статистический вес 326
- Стационарное состояние 302
- Стационарные состояния 487–490
- Степени свободы 253
- Степенная функция 32
- Степенной ряд 116
- Сторонние силы 363, 370
- Стоячие волны 412, 424
- Сухое трение 394
- Сфера 178
- Сферическая волна 421, 430
- Сферическое зеркало 441
- Сходимость ряда 114

- Тангенс 63, 65  
Твердое тело 258, 335, 339  
Телескоп 450  
Тень 439  
Теорема  
— Безу 43  
— Бернулли 208  
— Виета 40  
— Гаусса 381  
— Ирншоу 353  
— косинусов 158  
— Кронекера-Капелли 223  
— Пифагора 158, 173  
— синусов 158  
— Фалеса 153  
— Эйлера 172  
Тепловая машина 311  
Тепловой насос 314  
Теплоемкость 310  
Термодинамическая  
— вероятность 326  
— система 302  
— температура 315  
Термодинамическое равнове-  
сие 303  
Термометр газовый 306  
Тесла 241  
Тетраэдр 175  
Течение  
— ламинарное 298, 299  
— турбулентное 298, 299  
Ток короткого замыкания 364  
Тонкая линза 443  
Тор 180  
Точечное событие 470  
Точечный источник 439  
Точка  
— Кюри 369  
— материальная 253  
— перегиба 97  
— плавления 342  
— тройная 332  
Точка росы 331  
Траектория 253  
Трансформатор 378  
Трапеция 162  
— криволинейная 108  
Треугольник 153–158  
Тригонометрические функ-  
ции 63, 64  
— обратные 69  
Тройная точка 332  
Трубка  
— Вентури 297, 298  
— Пито 297  
— Прандтля 297  
Тяготение 265  
Тяжелые волны 432  
  
Увеличение 448, 450  
Угловая скорость 257  
Угол 150  
— вписанный 163, 164  
— двугранный 170  
— зрения 447  
— краевой 334  
— многогранный 170  
— падения 422, 437  
— преломления 422, 438  
— рассеяния 279  
— смачивания 334  
Удельная энергия связи 493  
Узлы стоячей волны 412, 424  
Ультразвук 419

- Униполярный индуктор 371
- Уравнение 36, 198
- алгебраическое 45
  - Бернулли 295
  - биквадратное 40
  - Ван-дер-Ваальса 328
  - дифференциальное 99–104, 201–202
  - иррациональное 47
  - квадратное 39
  - Клапейрона 306
  - Клапейрона — Менделеева 304
  - линейное 38
  - Мещерского 274
  - неразрывности 295
  - состояния 304
    - реальных газов 328
  - теплового баланса 341
  - Эйнштейна для фотоэффекта 485
- Уровни энергии 487
- Ускорение 255
- нормальное 255
  - свободного падения 268
  - тангенциальное 255
  - центростремительное 257
- Условие нормировки 209, 323
- Условия равновесия 282–285
- Условная вероятность 205
- Установившиеся колебания 395
- Установление колебаний 400
- Устойчивое равновесие 285
- Фаза колебаний 385
- Фазовая скорость волн 416
- Фазы термодинамической системы 307
- Факториал 118
- Ферромагнетики 369
- Фигуры Лиссажу 407, 408
- Флуктуации 325
- Фокальная плоскость 445
- Фокус
- гиперболы 167
  - зеркала 441
  - линзы 443
  - параболы 167
  - эллипса 165
- Фокусное расстояние
- зеркала 441
  - линзы 443
- Формула
- Бернулли 206
  - Герона 158
  - де Бройля 483
  - зеркала 442
  - квадратурная 193
  - линзы 445
  - Муавра 128
  - Планка 483, 492
  - прямоугольников 194
  - Пуазейля 247, 299
  - Рэлея 434
  - Симпсона 195
  - Стирлинга 118
  - Стокса 299
  - Торричелли 296
  - трапеций 193
  - Циолковского 274
  - Эйлера 127
  - Эйнштейна 476

**Формулы**

— Крамера 51, 217

— приведения 67

**Фотоаппарат** 446

**Фотоэффект** 485

**Фронт волны** 421

**Функция** 22

— возрастающая 24

— линейная 29

— монотонная 24

— непрерывная 92

— нечетная 26

— обратная 27

— ограниченная 27

— периодическая 25

— показательная 33

— степенная 32

— четная 26

**Химический эквивалент** 365

**Холодильная машина** 313

**Холодильный коэффициент** 314

**Хорда** 163

**Целые числа** 20

**Центр**

— конденсации 329

— кривизны 168

— масс 272, 273

— тяжести 273

**Центрированные оптические системы** 441

**Цепная**

— линия 104

— реакция 496

**Цикл** 308

— Карно 313

**Циклическая частота** 385

**Цилиндр** 176

**Цилиндрические координаты** 144

**Циркулярная поляризация** 429

**Цуги волн** 415

**Частота** 257

— колебаний 383

— круговая 385

— циклическая 385

**Черное**

— излучение 492

— тело 251, 491

**Четная функция** 26

**Числа**

— вещественные 22

— действительные 22

— комплексные 123

— натуральные 19

— простые 19

— рациональные 21

— целые 20

**Число**

— массовое 492

— Маха 427

— Рейнольдса 300

**Числовая апертура** 449

**Шар** 178

**Шунтирующее сопротивление** 357

Эквипотенциальные поверхности 346  
Экстенсивные параметры 304  
Экстраполяция 190  
Экстремум функции 96  
Электрическая  
— емкость 350  
— постоянная 241  
Электрический ток 353  
Электродвижущая сила 363  
Электролиз 365  
Электролиты 364  
Электромагнитные волны 381,  
414, 428–431  
Электростатическое поле 345,  
370  
Электрохимический эквива-  
лент 365  
Эллипс 165  
Энергетические уровни 487  
Энергия  
— взаимодействия заря-  
дов 352  
— волн 419  
— ионизации 488  
— кинетическая 275, 477  
— твердого тела 288  
— магнитного поля 369  
— поверхностная 333  
— покоя 476  
— потенциальная 276  
— релятивистская 475  
— связи ядра 493  
— электрического поля 352  
Энтропия 315, 327  
Эталон физической величи-  
ны 236

Эффект  
— Доплера 426, 486  
— Комптона 486

Ядерные  
— реакции 495–497  
— силы 494



## Список таблиц

**МАТЕМАТИКА**

4.1. Знаки тригонометрических функций .....	65
4.2. Значения тригонометрических функций для некоторых значений аргумента .....	67
5.1. Исследование функции в окрестности критиче- ской точки .....	96
5.2. Таблица производных .....	99
5.3. Таблица неопределенных интегралов .....	105
5.4. Некоторые определенные интегралы .....	110
6.1. Значения факториала .....	119
7.1. Формулы для аргумента комплексного числа .....	126
7.2. Аргументы действительных и чисто мнимых чисел	126
9.1. Правильные многогранники .....	175
10.1. Приближенные формулы .....	189
10.2. Результат эксперимента .....	190

**ФИЗИКА**

2.1. Плотность некоторых веществ (в $10^3$ кг/м <sup>3</sup> ) .....	294
3.1. Давление и плотность насыщенного водяного па- ра при различных температурах .....	332
3.2. Поверхностное натяжение некоторых жидкостей (в $10^{-2}$ Н/м при 20 °С) .....	333
3.3. Упругие постоянные некоторых веществ .....	338
3.4. Температурный коэффициент объемного расши- рения некоторых веществ .....	340
3.5. Удельная теплоемкость некоторых веществ (в кДж/(кг · К)) .....	341
3.6. Характеристики фазовых переходов некоторых веществ .....	343
4.1. Диэлектрическая проницаемость некоторых ве- ществ .....	349

4.2	Удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления некоторых металлов (при 20 °C) .....	355
5.1	Скорость звука в некоторых веществах (в м/с) ...	419
6.1	Показатель преломления некоторых прозрачных сред .....	437
7.1	Основные формулы атомной физики в гауссовой системе единиц и в СИ .....	489

## ПРИЛОЖЕНИЯ

I	Фундаментальные физические константы (по ГСССД 1–87) .....	499
II	Физические величины и их единицы в СИ .....	502
III	Соотношение между единицами СИ и гауссовой системы .....	509
IV	Значения некоторых внесистемных единиц в единицах СИ .....	511
V	Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц СИ .....	512
VI	Основные формулы электромагнетизма в гауссовой системе единиц и в СИ .....	513
VII	Таблица элементарных частиц .....	515
VIII	Названия, символы и атомные массы химических элементов .....	516
IX	Таблица математических символов .....	518

## Содержание

От редакции .....	3
-------------------	---

## МАТЕМАТИКА

<b>1. Основные обозначения, формулы и понятия....</b>	<b>5</b>
1.1. Общие правила .....	5
1.2. Десятичные дроби .....	10
1.3. Округление чисел. Приближенные числа .....	14
1.4. Метод математической индукции.....	15
<b>2. Множества. Действительные числа. Функции..</b>	<b>17</b>
2.1. Множества .....	17
2.2. Действительные числа.....	19
2.3. Функции.....	22
2.4. Основные свойства функций .....	24
2.5. Обратная функция .....	27
2.6. Линейная и квадратичная функции. Модуль... ..	29
2.7. Степенная функция .....	32
2.8. Показательная, гиперболические и логарифмическая функции.....	33
<b>3. Уравнения. Системы уравнений. Неравенства..</b>	<b>36</b>
3.1. Общие понятия .....	36
3.2. Линейное, квадратное и биквадратное уравнения .	38
3.3. Многочлены .....	40
3.4. Алгебраические уравнения .....	45
3.5. Иррациональные уравнения. Уравнения с модулями.....	47
3.6. Системы уравнений .....	50
3.7. Неравенства .....	55
<b>4. Тригонометрия .....</b>	<b>62</b>
4.1. Тригонометрические функции и их графики.....	63
4.2. Тригонометрические формулы .....	67
4.3. Обратные тригонометрические функции .....	69
4.4. Тригонометрические уравнения и неравенства ....	71

<b>5. Начала математического анализа</b> .....	<b>75</b>
5.1. Последовательности .....	75
5.2. Предел функции .....	82
5.3. Непрерывность функции. Разрывы .....	92
5.4. Производная и ее применение. Правила дифференцирования .....	95
5.5. Некоторые дифференциальные уравнения .....	99
5.6. Первообразная и неопределенный интеграл .....	104
5.7. Определенный интеграл и его приложения .....	107
5.8. Некоторые сведения о рядах .....	114
<b>6. Комбинаторика</b> .....	<b>118</b>
6.1. Перестановки. Размещения. Сочетания .....	118
6.2. Бином Ньютона .....	120
<b>7. Комплексные числа</b> .....	<b>122</b>
7.1. Общие положения .....	123
7.2. Алгебраическая форма .....	124
7.3. Тригонометрическая и показательная формы .....	125
7.4. Логарифмы комплексных чисел .....	131
7.5. Комплексные корни уравнений .....	131
<b>8. Векторы. Координаты. Перемещения и симметрии</b> .....	<b>132</b>
8.1. Векторы. Проекция .....	133
8.2. Скалярное и векторное произведения .....	137
8.3. Системы координат .....	140
8.4. Перемещение. Симметрия. Подобие .....	144
<b>9. Планиметрия и стереометрия</b> .....	<b>149</b>
9.1. Точки, прямые и углы на плоскости .....	149
9.2. Треугольники. Многоугольники .....	153
9.3. Окружность, эллипс, гипербола, парабола. Кривизна кривой .....	162
9.4. Точки, прямые и плоскости в пространстве .....	168
9.5. Многогранники .....	172
9.6. Тела вращения .....	176
9.7. Кривизна поверхности .....	180

<b>10. Приближенные вычисления</b>	<b>183</b>
10.1. Округления и погрешности	183
10.2. Приближение функций	186
10.3. Приближенное интегрирование	193
10.4. Приближенное решение уравнений	198
10.5. Приближенное решение дифференциальных уравнений	201
<b>11. Элементы теории вероятностей</b>	<b>202</b>
11.1. Случайные события и их вероятности	202
11.2. Случайные величины и их распределения	208
<b>12. Матрицы и определители</b>	<b>211</b>
12.1. Матрицы	211
12.2. Определители	217
12.3. Собственные числа матриц и квадратичные формы	224

## **ФИЗИКА**

<b>1. Физические величины, их размерности и системы единиц</b>	<b>232</b>
1.1. Основные понятия. Физические величины. Законы физики	232
1.2. Система единиц	234
1.3. Метод анализа размерностей	244
<b>2. Механика</b>	<b>252</b>
2.1. Кинематика	252
2.2. Динамика	260
2.3. Силы тяготения, трения и упругости	267
2.4. Законы сохранения	271
2.5. Движение в центральном поле тяготения	280
2.6. Механическое равновесие	282
2.7. Динамика твердого тела	286
2.8. Гидростатика	290
2.9. Гидродинамика	295

<b>3. Молекулярная физика и термодинамика.....</b>	<b>301</b>
3.1. Основы термодинамики .....	302
3.2. Основы статистической механики .....	316
3.3. Статистические распределения .....	320
3.4. Реальные газы .....	328
3.5. Жидкости .....	333
3.6. Твердые тела .....	335
3.7. Теплообмен. Фазовые переходы .....	341
<b>4. Электричество и магнетизм.....</b>	<b>344</b>
4.1. Электростатика.....	344
4.2. Электрический ток .....	353
4.3. Магнитное поле.....	365
4.4. Электромагнитная индукция .....	370
4.5. Переменный электрический ток .....	372
4.6. Электромагнитное поле .....	380
<b>5. Колебания и волны.....</b>	<b>382</b>
5.1. Классификация колебаний .....	383
5.2. Гармонические колебания .....	385
5.3. Собственные колебания простых систем.....	386
5.4. Вынужденные колебания. Резонанс .....	395
5.5. Параметрический резонанс. Автоколебания .....	401
5.6. Колебания сложных систем. Сложение колебаний .....	405
5.7. Волны .....	413
<b>6. Оптика .....</b>	<b>436</b>
6.1. Геометрическая оптика .....	436
6.2. Оптические приборы .....	446
6.3. Интерференция света.....	451
6.4. Дифракция света .....	458
6.5. Фотометрия .....	467
<b>7. Релятивистская и квантовая физика .....</b>	<b>468</b>
7.1. Теория относительности .....	469
7.2. Релятивистская кинематика .....	470
7.3. Релятивистская динамика .....	475
7.4. Основы квантовой физики .....	481
7.5. Строение атома.....	487

7.6. Атомное ядро.....	492
7.7. Элементарные частицы.....	497

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

I	Фундаментальные физические константы (по ГСССД 1–87) .....	499
II	Физические величины и их единицы в СИ .....	502
III	Соотношение между единицами СИ и гауссовой системы .....	509
IV	Значения некоторых внесистемных единиц в еди- ницах СИ .....	511
V	Множители и приставки для образования деся- тичных кратных и дольных единиц СИ .....	512
VI	Основные формулы электромагнетизма в гауссо- вой системе единиц и в СИ .....	513
VII	Таблица элементарных частиц.....	515
VIII	Названия, символы и атомные массы химических элементов.....	516
IX	Таблица математических символов .....	518

<b>Предметный указатель.....</b>	<b>519</b>
<b>Список таблиц.....</b>	<b>536</b>

## КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА ВЫ МОЖЕТЕ ПРИОБРЕСТИ:

### МОСКВА

Книготорговая корпорация «Абрис-Д».  
129075, Москва, Калибровская улица,  
дом 31-а, офис 408.  
Тел. (095) 215-2901, 216-2362,  
216-6802, 261-6870,  
факс: (095) 216-26-75  
E-mail: abrisd@textbook.ru

### ООО «ЧеРо».

118899, Москва, Хохлова, 11.  
Тел. (095) 939-3493, (095) 939-4190.  
E-mail: chero@orc.ru

### ПБЮЮЛ Ермолаев.

Москва, СК Олимпийский,  
точка № 30, 21-22, 258, 133.  
E-mail: olimp30@mail.ru

### С.-ПЕТЕРБУРГ

#### Издательство «Петроглиф».

E-mail: info@atlas.spb.su.  
Отдел реализации:  
С.-Петербург, ул. Бассейная, д. 47.  
Тел. (812) 388-5881

#### Издательство «Паритет».

С.-Петербург, ул. Михайлова, д. 8.  
Тел. (812) 541-8194.  
E-mail: or\_paritet@mail.spbnit.ru.  
Представительство в Москве:  
ООО «МиМ-М». Тел. (095) 953-0507.  
E-mail: larcheck@yandex.ru

### БРАТСК

#### ООО «Меридиан».

Братск, ул. Крупской, 27,  
маг. «Меридиан». Тел. (3953) 42-85-06.  
E-mail: Meridian@bratsk.net.ru

### ВЛАДИВОСТОК

#### ОАО «Приморский торговый дом книги».

Владивосток, ул. Светланская, 43.  
Тел./факс: (4232) 22-4378, 23-8212;  
тел. 23-9968, 23-7339.  
E-mail: bookbase@mail.primorye.ru

### ВЛАДИМИР

#### ООО «Книга».

Владимир, ул. Горького, 44,  
маг. «Книга». Тел. (0922) 33-2209

### ВОЛГОГРАД

#### ООО «Учебная и деловая книга».

400078, Волгоград, пр. Ленина, 75.  
Тел. (8442) 73-4837, 76-0036, 76-0606.  
E-mail: dk@interdacon.ru

### ООО «Дека-Квазар».

Волгоград, ул. Баррикадная, 1,  
тел. (8442) 93-0465, 90-0585;  
ул. 8-ой воздушной армии,  
маг. «Удачная покупка»;  
Астрахань, ул. Кирова, 9,  
Центр. универмаг, 2-ой этаж,  
тел. (8512) 38-9388.  
E-mail: nn@dkvazar.vlink.ru

### ЕКАТЕРИНБУРГ

#### КТК «Дом Книги».

620077, Екатеринбург, ул. Валека, 12,  
маг. «Дом книги».  
Тел. (3432) 58-1201, 58-1898.  
E-mail: domknigi@mail.ur.ru

#### Маг. № 14.

Екатеринбург, ул. Челюскинцев, 23,  
маг. № 14. Тел. (3432) 53-2489.  
E-mail: gvardia@mail.e-burg.ru

### ИЖЕВСК

#### ООО «Инвис».

Ижевск, ул. М. Горького, 80,  
маг. «Инвис»,  
тел. (3412) 78-1624;  
ул. М. Горького, 51, тел. (3412) 51-33-38.  
E-mail: invis@book.udm.ru

### КАЛИНИНГРАД

#### ТД «Вестер».

«Книги и книжечки»: Калининград,  
Ленинский пр., 103,  
тел. (0112) 56-6568;  
Ленинский пр., 16, тел. 43-1239;  
пл. Победы, 1, тел. 21-5628.  
«Деловые книги и книжечки»:  
ул. Фрунзе, 6, тел. 33-9910.  
E-mail: nbajda@vester.ru

#### ГИПП «Янтарный сказ».

236000, Калининград, К. Маркса, 18.  
Тел. (0112) 21-9249, 21-6251, 27-9157

### КИРОВ

#### ООО «Бумага».

Киров, ул. Московская, 148,  
тел. (8332) 51-0470;  
ул. Подгорная, 2,  
тел. 58-0211, 24-5010.  
Вятские Поляны, ул. Азина, 11,  
тел. (83334) 6-1096.  
E-mail: online@paper.kirov.ru



## **КРАСНОДАР**

### **ООО «БУК-ПРЕСС».**

Краснодар, ул. Товарная, 5,  
маг. «Деловая книга»,  
тел. (8612) 62-8129;  
ул. Ставропольская, 222,  
ООО «РБС и К»,  
маг. «Деловая книга».  
E-mail: dges@mail.kuban.ru

## **КУРСК**

### **ЧП Штырмер.**

Курск, ул. Чехова, 3,  
маг. «Книги»;  
ул. Павлова, 6,  
маг. «Книги».  
E-mail: intellectobrxxi@mail.ru

## **НИЖНИЙ НОВГОРОД**

### **ОАО «Книга».**

Н. Новгород,  
Сормовское ш., квартал 17.  
Тел. (8312) 41-2569.  
E-mail: ao\_kniga@mailru.com

## **НОВОСИБИРСК**

### **ООО «Топ-книга».**

630117, Новосибирск,  
ул. Арбузова, 1/1.  
Тел. (383-2) 36-1026, 36-1027  
E-mail: office@top-kniga.ru.  
www.top-kniga.ru

## **ОМСК**

### **Омский Учебный коллектор.**

Омск, ул. 22 Апреля, 8 В.  
Тел. (3812) 64-7366.  
Маг. «Областной Учколлектор».  
E-mail: info@metida.ru

## **ОРЕЛ**

### **ОАО «Орловский Учебный коллектор».**

Орел, ул. Комсомольская, 169.  
Тел. (0862) 75-2911

## **ПЕРМЬ**

### **ЧП Зеленецкий.**

Пермь, ул. Героев Хасана, 10.  
Тел. (3422) 41-0551.  
E-mail: azb\_plus@perm.raid.ru

## **РОСТОВ-НА-ДОНУ**

### **ПБЮЛ Рудницкий.**

Ростов-на-Дону, ул. Тельмана, 36/100,  
тел. (8632) 34-8296;

ул. Соколова, 85, тел. 91-0353;  
ул. Нагибина, 12а, тел. 43-1153.  
E-mail: rudskl@jeo.ru

## **САМАРА**

### **ООО «Киви».**

Самара, ул. Чкалова, 100,  
тел. (8462) 42-9622/28/29/30;  
маг. «Чакона», ул. Ульяновская, 18;  
ТК «Вавилон», тел. 78-4234,  
ул.Нововокзальная, 203, тел. 53-3001;  
Тольятти, ТЦ «Русь», секц. 301а,  
тел. 71-1678, 71-1679.  
E-mail: chaconne@chaconne.ru

### **ООО «Метид».**

Самара, пр. Юных пионеров, 146,  
«Опточно-розничный книжный центр  
Метид».  
E-mail: info@metida.ru

## **ТУЛА**

### **ООО «Галатея».**

Тула, пр. Ленина, 102, кор. 4.  
Тел. (0872) 35-8205.  
E-mail: ooo-galateya@mail.ru

### **ООО «Система Плюс».**

Тула, ул. Кирова, 23а, маг. «Лагуна».  
E-mail: sistema\_plus@tula.net

## **ТЮМЕНЬ**

### **МУП «Знание».**

Тюмень, ул. Орджоникидзе, 51,  
маг. «Знание». Тел. (3452) 46-4287.  
E-mail: znanie@tmn.ru

## **УССУРИЙСК**

### **ЧП Свиридова.**

Уссурийск, ул. С. Лазо, 1.  
E-mail: stalker@ml.ussuriisk.ru

## **УФА**

### **ООО «Эдвис».**

Уфа, ул. 50-летия СССР, 12.  
Тел. (3472) 25-5630.  
E-mail: edvis@poikc.bashnet.ru

## **ЧЕБОКСАРЫ**

### **ЧП Шарипова.**

Чебоксары, ул. Водопроводная, 22,  
тел. (8352) 42-0304; маг. «Мир книг».  
E-mail: umax@chtt.ru

ISBN 5-98712-002-0



9 785987 120026